2008 年度 計算アルゴリズム 中間試験解答

問題 1

(1) ニュートン法の公式より,

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 &= x_n - \frac{x_n^3 - 10}{3x_n^2} \\
 &= \frac{2}{3}x_n + \frac{10}{3x_n^2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

したがって, 反復式は $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{10}{3x_n^2}$ である。

(2) 同様に, ニュートン法の公式より,

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
 &= x_n - \frac{x^2 - \frac{10}{x_n}}{2x_n + \frac{10}{x_n^2}} \\
 &= \frac{x_n^4 + 20x_n}{2x_n^3 + 10}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

したがって, 反復式は $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 20x_n}{2x_n^3 + 10}$ である。

(3) 誤差について $e_{n+1} \simeq e_n^2$ が成り立っているから, 2 次収束であると推測される。これを理論的に示すため, ニュートン法の反復式の両辺から $f(x) = 0$ の解 ξ を引いて誤差 e_n に対する漸化式を求めると, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= e_n - \frac{f(\xi + e_n)}{f'(\xi + e_n)} \\
 &= e_n - \frac{f(\xi) + e_n f'(\xi) + \frac{1}{2}e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\
 &= \frac{e_n f'(\xi) + e_n^2 f''(\xi) - f(\xi) - e_n f'(\xi) - \frac{1}{2}e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + O(e_n)} \\
 &\simeq \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} e_n^2.
 \end{aligned} \tag{3}$$

この場合, $f'(\xi) = 3\xi^2 = 3(\sqrt[3]{10})^2 \neq 0$, $f''(\xi) = 6\xi = 6\sqrt[3]{10} \neq 0$ だから, e_n は確かに 2 次収束することがわかる。

(4) 誤差について $e_{n+1} \simeq e_n^3$ が成り立っているから, 3 次収束であると推測される。これを理論的に示すため, ニュートン法の反復式の両辺から $f(x) = 0$ の解 ξ を引いて誤差 e_n に対する漸化式を求める。ただし, この場合は $f''(\xi) = 2 - \frac{20}{\xi^3} = 2 - \frac{20}{10} = 0$ なので, 式 (3) のようにテイラー展開で $f''(x)$ の項までとったのでは不十分であり, もう 1 つ先の項までとる必要がある。なお, $f'(\xi) = 2\xi + \frac{10}{\xi^2} = 3\sqrt[3]{10}$ なので, 分母が 0 になる心配はない。以上の考察の下で漸化式を求めると次のようになる。

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(\xi + e_n)}{f'(\xi + e_n)}$$

$$\begin{aligned}
&= e_n - \frac{f(\xi) + e_n f'(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + \frac{1}{6} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f'''(\xi) + O(e_n^3)} \\
&= \frac{e_n f'(\xi) + e_n^2 f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^3 f'''(\xi) - f(\xi) - e_n f'(\xi) - \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) - \frac{1}{6} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f'''(\xi) + O(e_n^3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{f'(\xi) + O(e_n)} \\
&\simeq \frac{1}{3} \frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)} e_n^3.
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで, $f'''(\xi) = \frac{60}{\xi^4} = \frac{60}{(\sqrt[3]{10})^4} \neq 0$ だから, e_n は確かに 3 次収束することがわかる。

問題 2

- (1) $y_i = \cos x_i$ とすると, $y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_2 = 1, y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_4 = 0$ である。したがって, $x = x_i$ で $1, x = x_j (j \neq i)$ で 0 をとる 4 次多項式を $\phi_i(x)$ とすると, ラグランジュ補間の公式より,

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= \sum_{i=0}^4 y_i \phi_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^3 y_i \phi_i(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x + \frac{\pi}{2})x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})}{(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})(-\frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} \\
&\quad + 1 \cdot \frac{(x + \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4}(-\frac{\pi}{4})(-\frac{\pi}{2})} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(x + \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{4})x(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{64}{\pi^4} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) \left\{ \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) x^2 - \frac{\pi^2}{16} \right\}
\end{aligned} \tag{5}$$

となる。

- (2) ラグランジュ補間の誤差の公式において $f^{(5)}(x) = \frac{d^5}{dx^5} \cos x = -\sin x$ に注意すると, 次のように絶対誤差の上限が得られる。

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_4(x)| &\leq \frac{1}{5!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_4} |f^{(5)}(\xi)| |x_4 - x_0|^5 \\
&= \frac{1}{120} \max_{-\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}} |\sin x| \cdot \pi^5 \\
&= \frac{\pi^5}{120}.
\end{aligned} \tag{6}$$

- (3) 小問 (1) で求めた補間式に $x = \frac{\pi}{3}$ を代入すると,

$$\begin{aligned}
f_4\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{64}{\pi^4} \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{4} \right) \left\{ \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} \right\} \\
&= -\frac{35}{81} + \frac{160\sqrt{2}}{243} \\
&\simeq 0.49907065.
\end{aligned} \tag{7}$$

よって, 誤差は

$$\left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f_4\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| \simeq 0.5 - 0.49907065 \simeq -9.29 \times 10^{-4} \tag{8}$$

となる。これは小問 (2) で求めた上限に比べて確かに小さい。

問題 3

- (1) 台形公式では、点 $x_0 = 0, x_n = 1$ での関数値に重み $\frac{h}{2}$ 、それ以外の点 $x_j = jh (j = 1, 2, \dots, n-1)$ での関数値に重み h を掛けて加えるから、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 I^{(1)} &= \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \sum_{j=1}^{n-1} (jh)^4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) h \\
 &= \left(h^4 \sum_{j=1}^n j^4 - \frac{1}{2} \right) h \\
 &= \left\{ h^4 \cdot n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30 - \frac{1}{2} \right\} h \\
 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{30}h^4. \tag{9}
 \end{aligned}$$

- (2) シンプソン公式では、両端の点での関数値に重み $\frac{h}{3}$ 、点 $x_1, x_3, \dots, x_{n-1}$ での関数値に重み $\frac{4}{3}h$ 、点 $x_2, x_4, \dots, x_{n-2}$ での関数値に重み $\frac{2}{3}h$ を掛けて加えるから、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 I^{(2)} &= \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \{(2j-1)h\}^4 + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (2jh)^4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) h \\
 &= \left(\frac{4}{3}h^4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} (2j-1)^4 + \frac{2}{3} \cdot 16h^4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} j^4 - \frac{1}{3} \right) h \\
 &= \left[\frac{4}{3}h^4 \left\{ 48 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^5 - 40 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 + 7 \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \right\} \cdot \frac{1}{15} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} \cdot 16h^4 \left\{ 6 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^5 + 15 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 - \frac{n}{2} \right\} \cdot \frac{1}{30} - \frac{1}{3} \right] h \\
 &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}h^4. \tag{10}
 \end{aligned}$$

- (3) 真の積分値は $I = \frac{1}{5}$ であるから、小問 (1) の結果より、台形公式の誤差は $\frac{1}{3}h^2 - \frac{1}{30}h^4$ であり、 h^2 のオーダーとなる。一方、小問 (2) の結果より、シンプソン公式の誤差は $\frac{2}{15}h^4$ であり、 h^4 のオーダーとなる。