2008 年度　応用数学　第 1 回レポート課題

11/17（月）の授業終了時に提出してください。

問題 1

$x > 0$，$|x| \ll 1$ のとき，以下の各式の計算において桁落ちが生じる可能性があるかどうか判定せよ。可能性がある場合，どのように式を変形すれば桁落ちが避けられるかを述べよ。また，$\sinh x$，3 乗根などの関数は高精度に計算できるとする。

(1) $\sinh(1+x) - \sinh(1-x)$

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

問題 2

(1) 次の連立方程式の解をニュートン法で求めるための反復式（x_n, y_n から x_{n+1}, y_{n+1} を求める式）を書け。

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2 \\ 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3 = 11 \end{cases} \tag{1}$$

(2) 小問 (1) の結果に基づき，初期値 $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ から出発してニュートン法を 5 回反復し，各反復での近似解 x_n, y_n を出力するプログラムを書け。言語は何でもよいが，倍精度で計算するようにせよ。

(3) 上記のプログラムを実行し，結果を添付せよ。もし計算機が利用できない場合は，手計算でもよい。その場合は，3 回反復すればよい。

(4) 方程式 (1) の解（の１つ）は $x = y = 1$ である。各ステップでの誤差 $\epsilon_n = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$ が n とともにどのように減少するか，実験結果から考察せよ。また，これより，この場合のニュートン法の収束次数を推定せよ。

問題 3

(1) 次の式で定義される関数

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x \sin t}\, dt \tag{2}$$

を区間 $[0, 1]$ で $n+1$ 個の点 $x_i = \frac{i}{n}$（$i = 0, 1, \ldots, n$）を使ってラグランジュ補間することを考える。このとき，次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の m 階微分を $f^{(m)}(x)$ と書くとき，区間 $[0, 1]$ において $|f^{(m)}(x)| \le e$（$m = 0, 1, 2, \ldots$）であることを示せ。ただし，x に関する微分と t に関する積分の順序を交換してよい。

(2) $n+1$ 個の点を使ったラグランジュ補間について，区間 $[0, 1]$ 内での絶対誤差の上限を求めよ。

(3) 絶対誤差を 10^{-8} 以下にするには，n をどのように定めればよいか。