2008年度　計算アルゴリズム　第2回レポート課題

1/19（月）の授業終了時に提出してください。

問題 1

積分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\, dx \tag{1}$$

の値を 2 重指数型数値積分公式を用いて求めることを考える。このとき，次の問に答えよ。

(1) 変数変換 $x = \tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh t\right)$ を用いて，式 (1) を t に関する積分に変換せよ。

(2) 小問 (1) の被積分関数において，$t \to \pm\infty$ のとき，桁落ちが生じる可能性があるかどうかを調べよ。もし可能性があるならば，桁落ちが生じないように被積分関数の式を変形せよ。

(3) 小問 (2) で得られた積分の式に対し，台形公式を適用して数値積分を行うプログラムを書け。言語は何でもよいが，計算は倍精度で行うようにせよ。積分区間は $[-5, 5]$ とし，N を入力としてこの区間を N 分割して計算するようにせよ。また，積分値および真の値 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ との誤差を出力するようにせよ。

(4) $N = 16$，32，64，128 と変えて小問 (3) のプログラムを実行し，積分値と誤差を求めよ。また，誤差を片対数グラフにプロットせよ。

問題 2

連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \tag{2}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \tag{3}$$

に対する数値解法について，次の問に答えよ。

(1) この連立常微分方程式をオイラー法を用いて解くときの反復式（(x_n, y_n) から (x_{n+1}, y_{n+1}) を求める式）を書け。

(2) この連立常微分方程式をホイン法を用いて解くときの反復式を書け。

(3) 小問 (1) の反復式に基づき，プログラムを作成して実行せよ。また，刻み幅を $h = 0.05$ とし，$0 \le t \le 20$ の範囲の解を xy 平面上にプロットせよ。

(4) 小問 (2) の反復式に基づき，プログラムを作成して実行せよ。また，刻み幅を $h = 0.05$ とし，$0 \le t \le 20$ の範囲の解を xy 平面上にプロットせよ。

(5) オイラー法とホイン法の結果を比較し，考察せよ。

問題 3

$n \times n$ の三重対角行列

$$A = \begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & b & c \\ & & & a & b \end{pmatrix} \tag{4}$$

（ただし $a > 0$，$c > 0$）の固有値と固有ベクトルを次の手順で求めよ。

(1) 対角行列 D を $D = \mathrm{diag}\left(1, \sqrt{\frac{a}{c}}, \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^{n-1}\right)$ により定義する。このとき，

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} b & r & & & \\ r & b & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & b & r \\ & & & r & b \end{pmatrix} \tag{5}$$

（ただし $r = \sqrt{ac}$）となることを示せ。したがって，A の固有値は対称行列 $C \equiv D^{-1}AD$ の固有値と同じである。

(2) C の固有値の 1 つを λ，対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}$，$\mathbf{v}$ の成分を v_j（$j = 1, 2, \ldots, n$）とするとき，v_{j-1}，v_j，v_{j+1} の満たす 3 項間の漸化式を求めよ。ただし，$v_0 = v_{n+1} = 0$ と定義する。

(3) $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$（ただし i は虚数単位）とおき，境界条件 $v_0 = v_{n+1} = 0$ より，$c_1 = c_2 = 0$ 以外の解が存在するための θ に関する条件を求めよ。また，v_j の式と求めた θ を小問 (2) の漸化式に代入することにより，固有値 λ を（n 個）求めよ。また，それぞれに対応する固有ベクトル $\mathbf{v}$ を求めよ。

(4) 小問 (3) の結果を用いて，A のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ。