2008 年度　計算アルゴリズム　第 1 回レポート 解答

問題 1

(1) $\sinh 1+x$ と $\sinh 1-x$ は非常に近い同符号の数であるため，引き算をすると桁落ちが生じる。これを防ぐには，次のように変形してから計算すればよい。

$$\begin{aligned}\sinh(1+x)-\sinh(1-x) &= (\sinh 1\cosh x+\cosh 1\sinh x)-(\sinh 1\cosh x-\cosh 1\sinh x)\\ &= 2\cosh 1\sinh x. \end{aligned} \tag{1}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ と $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ は非常に近い同符号の数であるため，引き算をすると桁落ちが生じる。これを防ぐには，次のように変形してから計算すればよい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} &= \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}}\\ &= \frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left\{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2\right\}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}\left\{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2\right\}}\\ &= \frac{2x}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}\left\{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+(\sqrt[3]{1-x})^2\right\}}. \end{aligned} \tag{2}$$

問題 2

(1)

$$f(x,y)=x^3+3x^2y-2y^3-2,\quad g(x,y)=3x^2y+6xy^2+2y^3-11 \tag{3}$$

とおくと，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-6y^2,\quad \frac{\partial g}{\partial x}=6xy+6y^2,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=3x^2+12xy+6y^2. \tag{4}$$

よって，2 変数ニュートン法の反復式は，

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} x_n\\ y_n\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}_{x=x_n,y=y_n}\right)^{-1}\begin{bmatrix} f(x_n,y_n)\\ g(x_n,y_n)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} x_n\\ y_n\end{bmatrix}-\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}}\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial y}\\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x_n,y_n)\\ g(x_n,y_n)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} x_n\\ y_n\end{bmatrix}-\frac{1}{3\left\{(x_n^2+2x_ny_n)(x_n^2+4x_ny_n+2y_n^2)-(x_n^2-2y_n^2)(2x_ny_n+2y_n^2)\right\}}\\ &\quad\times\begin{bmatrix} x_n^2+4x_ny_n+2y_n^2 & -x_n^2+2y_n^2\\ -2x_ny_n-2y_n^2 & x_n^2+2x_ny_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n^3+3x_n^2y_n-2y_n^3-2\\ 3x_n^2y+6x_ny_n^2+2y_n^3-11\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

となる。

(2) ホームページのシラバス中のプログラム「Newton2d.f」を参照。

n	x_n	y_n	e_n
1	0.885601578	1.394477318	4.10×10^{-1}
2	0.939102839	1.080408297	1.00×10^{-1}
3	0.995882723	1.002456681	4.79×10^{-3}
4	0.999999655	0.999997396	2.62×10^{-6}
5	1.000000000	1.000000000	6.07×10^{-12}

(3) 初期値 $x_0 = 1, y_o = 2$ から始めてニュートン法を 5 ステップ実行すると，表のようになる。ただし，e_n は真の解 $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ との誤差のノルムで，$e_n = \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2}$ である。

(4) $e_{n+1} \simeq e_n^2$ が成り立つことから，2 次収束であると推定される。
（参考： 2 次収束することは，理論的にも証明できる。）

問題 3

(1) まず，

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{x \sin t} = (\sin t)^m e^{x \sin t} \tag{6}$$

より，$x \in [0, 1]$，$t \in [0, \pi]$ のとき，

$$\left| \frac{d^m}{dx^m} e^{x \sin t} \right| = |\sin t|^m \left| e^{x \sin t} \right| \leq 1 \cdot e = e. \tag{7}$$

これより，

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &= \frac{1}{\pi} \left| \frac{d^m}{dx^m} \int_0^{\pi} e^{x \sin t}\, dt \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \frac{d^m}{dx^m} e^{x \sin t}\, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{d^m}{dx^m} e^{x \sin t} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e\, dt = e \end{aligned} \tag{8}$$

となる。ただし，2 番目の等号では x に関する微分と t に関する積分との順序を交換してよいことを用いた。

(2) 区間 $[0, 1]$ における n 次のラグランジュ補間の絶対誤差の上限を e_n とすると，公式より，

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| |x_n - x_0|^{n+1} \\ &= \frac{e}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。

(3) 小問 (2) の結果より，

$$\frac{e}{(n+1)!} \leq 10^{-8} \tag{10}$$

となる最小の n を求めると，$n = 11$ となる。よって，$n \geq 11$ と定めればよい。