

2008 年度 計算アルゴリズム 第 2 回レポート 解答

問題 1

(1) $dx = \frac{\pi}{2} \cosh t / \cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) dt$ より, 変数変換後の積分は次のようになる。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \tanh^4 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)} dt. \quad (1)$$

(2) $t \rightarrow \pm\infty$ のとき $\tanh \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) \rightarrow \pm 1$ であるから, 被積分関数の最初の因子の分母の 4 乗根の中では, 1 から 1 に非常に近い数を引くことになり, 桁落ちが生じる。これを解消するには, 次の変形を行えばよい。

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^4 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) &= \left\{ 1 + \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) \right\} \left\{ 1 - \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right) \right\} \\ &= \frac{1 + \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)}{\cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

これを代入すると積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)}{\sqrt[4]{1 + \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \sinh t \right)} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

(3) ホームページのシラバス中のプログラム「DE.f」を参照。

(4) $N = 16, 32, 64, 128$ と変えて小問 (3) のプログラムを実行すると, 積分値 I_N と誤差 e_N は表のようになる。 N が 2 倍になると有効桁数が 2 倍になる, 指数的な誤差の減少が見られる。

N	I_N	e_n
16	2.22665725524043	0.00521578616125
32	2.22145666472591	0.00001519564673
64	2.22144146931651	0.00000000023733
128	2.22144146907918	0.00000000000000

問題 2

(1) オイラー法の公式より, 反復式は次のようになる。

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(x_n - 2y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h(x_n - y_n). \end{cases} \quad (4)$$

(2) ホイン法では, まず (x_n, y_n) から始めて オイラー法を 1 ステップ実行し, 仮の値 $(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$ を求める。次に, (x_n, y_n) と $(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$ のそれぞれから常微分方程式の右辺を計算し, その平均を右辺として用いる。したがって, 反復式は次のようになる。

$$\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = x_n + h(x_n - 2y_n) \\ \tilde{y}_{n+1} = y_n + h(x_n - y_n). \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \{ (x_n - 2y_n) + (\tilde{x}_{n+1} - 2\tilde{y}_{n+1}) \} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \{ (x_n - y_n) + (\tilde{x}_n - \tilde{y}_{n+1}) \}. \end{cases} \quad (6)$$

- (3) ホームページのシラバス中のプログラム「Euler2d.f」を参照。また，同箇所にあるグラフを参照。
- (4) ホームページのシラバス中のプログラム「Heun2d.f」を参照。また，同箇所にあるグラフを参照。
- (5) この連立常微分方程式の解は $x = \cos t + \sin t$, $y = \sin t$ であり，周期 2π を持つ。しかし，オイラー法の解は 1 周するごとに原点から離れており，この周期性が保たれていない。一方，ホイン法の解はほぼ周期性を持っており，本来の解の性質が良く保たれていることがわかる。また，解析解から導かれる性質 $-\sqrt{2} \leq x(t) \leq \sqrt{2}$, $-1 \leq y(t) \leq 1$ も良く成り立っている。

問題 3

- (1) D^{-1} を左からかけることにより， A の第 i 行は $(\sqrt{\frac{c}{a}})^{i-1}$ 倍される。また， D を右からかけることにより， A の第 j 列は $(\sqrt{\frac{a}{c}})^{j-1}$ 倍される。したがって， $C = D^{-1}AD$ の対角要素は A の対角要素と同じであり，第 $(i+1, i)$ 要素は $\sqrt{\frac{c}{a}}$ 倍，第 $(i, i+1)$ 要素は $\sqrt{\frac{a}{c}}$ 倍される。以上より， $D^{-1}AD$ の対角要素はすべて b ，副対角要素（第 $i+1, i$ 要素および第 $i, i+1$ 要素）はすべて $\sqrt{ac} = r$ となる。

- (2) 固有方程式 $(C - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ （ただし I は単位行列）の第 j 成分を書き下すと，

$$rv_{j-1} + (b - \lambda)v_j + rv_{j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

となる。ここで， $v_0 = v_{n+1} = 0$ という定義を用いた。式 (7) が求める 3 項漸化式である。

- (3) $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ を $v_0 = 0$, $v_{n+1} = 0$ に代入すると，

$$v_0 = c_1 + c_2 = 0 \quad (8)$$

$$v_{n+1} = c_1 e^{i(n+1)\theta} + c_2 e^{-i(n+1)\theta} = 0. \quad (9)$$

これが $c_1 = c_2 = 0$ 以外の解を持つ条件は，

$$e^{-i(n+1)\theta} - e^{i(n+1)\theta} = 0. \quad (10)$$

整理すると，

$$\sin(n+1)\theta = 0. \quad (11)$$

ここで， θ を $\theta + 2m\pi$ (m は整数) で置き換えても v_j の値は変わらない。さらに， θ と $\theta + \pi$ は， c_1 と c_2 の役割を交換すれば同じ解を与えるから， θ は $0 \leq \theta < \pi$ の範囲で考えてよい。したがって， $(n+1)\theta = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$ 。この中で， $\theta = 0$ のときは， $v_j = c_1 + c_2$ ($1 \leq j \leq n$) となるが，式 (8) より $c_1 + c_2 = 0$ であるから， $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となって不適である。これより，条件を満たす θ は，

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

の n 個である。また，式 (8) より $c_2 = -c_1$ であるから， $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i}$ としてよい。

そこで， $v_j = \frac{1}{2i} e^{ij\theta} - \frac{1}{2i} e^{-ij\theta} = \sin(j\theta)$ を式 (7) に代入すると，

$$r \sin(j-1)\theta + (b - \lambda) \sin(j\theta) + r \sin(j+1)\theta = 0. \quad (13)$$

整理すると，

$$\sin(j\theta) (2r \cos \theta + (b - \lambda)) = 0. \quad (14)$$

これがすべての j ($1 \leq j \leq n$) について成り立たねばならないから，

$$2r \cos \theta + (b - \lambda) = 0, \quad (15)$$

したがって固有値は，

$$\lambda_k = b + 2r \cos \theta = b + 2r \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

となる。 λ_k に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_k$ とすると，その第 j 成分は

$$v_{jk} = \sin(j\theta) = \sin \frac{jk\pi}{n+1} \quad (17)$$

となる。

- (4) 行列 $C = D^{-1}AD$ と A の固有値は等しい。また， C の固有ベクトルが $\mathbf{v}$ のとき， A の固有ベクトルは $D\mathbf{v}$ となる。したがって，小問 (3) の結果より， A の固有値は

$$\lambda_k = b + 2r \cos \theta = b + 2r \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

対応する固有ベクトル $\mathbf{u}_k$ の第 j 成分は，

$$u_{jk} = \left(\sqrt{\frac{a}{c}} \right)^{j-1} v_{jk} = \left(\sqrt{\frac{a}{c}} \right)^{j-1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \quad (19)$$

となる。