第8章　偏微分方程式の解法（II）

本章では楕円型方程式，特にポアソン方程式の差分法による解法について学ぶ。差分法によりポアソン方程式を近似すると，大規模な連立一次方程式が生じる。この方程式を解くため，反復解法と呼ばれる解法を設計することができる。ここでは，もっとも基本的な反復解法であるヤコビ法を紹介し，次にその改良版であるガウス＝ザイデル法，SOR 法についても紹介する。

8.1　ポアソン方程式に対する差分法

ここでは，次のようなポアソン方程式の境界値問題を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y) \quad \text{in} \quad \Omega \tag{8.1}$$

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(x, y) \quad \text{on} \quad \Gamma_2 \tag{8.3}$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \tag{8.4}$$

ここで，Ω は方程式が定義される領域，Γ はその境界であり，Γ_1 と Γ_2 には重なりがないものとする。また，$\frac{\partial}{\partial n}$ は境界の法線方向の微分を表す。(8.2) 式のタイプの境界条件を**第１種境界条件**または**ディリクレ型境界条件**と呼び，(8.3) 式のタイプの境界条件を**第２種境界条件**または**ノイマン型境界条件**と呼ぶ。

ディリクレ型境界条件の場合　以下では，$\Omega = [0, 1]^2$ の場合を考える。さらに，最初は全境界上でディリクレ型境界条件が課されている場合，すなわち，

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{on} \quad \Gamma \tag{8.5}$$

の場合を考える。

いま，x 方向，y 方向をそれぞれ N 等分し，離散的な点

$$(x_i, y_j) = (\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, N) \tag{8.6}$$

における関数値 $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ を考える。すると，$u_{0,j}$，$u_{N,j}$，$u_{i,0}$，$u_{i,N}$ は境界条件より

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= g(0, y_j), \qquad u_{N,j} = g(1, y_j) \\ u_{i,0} &= g(x_i, 0), \qquad u_{i,N} = g(x_i, 1) \end{aligned} \tag{8.7}$$

と定まるから，それ以外の $(N-1)^2$ 個が未知数となる。この $(N-1)^2$ 個の点のそれぞれで，ポアソン方程式を中心差分を使って近似すると，次の方程式ができる。

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}=f(x_i,y_j) \tag{8.8}$$

ただし，$h=\frac{1}{N}$ とする。これは $(N-1)^2$ 個の未知数に対する $(N-1)^2$ 本の連立一次方程式であるから，これを解けば差分法によるポアソン方程式の近似解が求められる。

ノイマン型境界条件の場合　境界上のある区間，たとえば $x=1$，$0<y<1$ でノイマン型境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=h(1,y) \qquad (0<y<1) \tag{8.9}$$

が与えられていたとする。このときは，$x=1$ 上の点での値 u_{Nj}（$j=1,\ldots,N-1$）も未知数に取ればよい。そして，ノイマン型境界条件の式を次のように差分近似する。

$$\frac{u_{Nj}-u_{N-1,j}}{h}=h(1,y_j) \tag{8.10}$$

こうして，新たな未知数が 1 個増えるのに対して方程式も 1 個増加するから，この拡大された連立一次方程式を解けば近似解が求められる。

8.2　差分法から生じる連立一次方程式の解法

ヤコビ法　前節で導いた連立一次方程式 (8.8) は，第 9 章で学ぶ一般的な解法を用いてももちろん解けるが，問題の物理的な性質を利用して解くこともできる。それには，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,y)$ の解が，同じ境界条件を持つ放物型偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-f(x,y) \tag{8.11}$$

の定常解であることに着目する。適当な初期値 $u_0(x,y)$ から出発し，前章で学んだ陽的差分法を使って (8.11) 式をどんどん時間発展させてやれば，$u(x,y,t)$ は徐々に定常解，すなわちポアソン方程式の解に近づくことが期待できる。なお，前章では陰的差分法，クランク＝ニコルソン法についても学んだが，これらの解法では時間ステップを進めるために連立一次方程式を解くことが必要となるため，今の目的には意味がないことに注意されたい。

時間方向の刻み幅を k とし，第 n 時間ステップにおける放物型方程式の解を $u_{ij}^{(n)}$ とすると，陽的差分法の式は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{u_{i,j}^{(n+1)}-u_{i,j}^{(n)}}{k}\\&=\frac{u_{i+1,j}^{(n)}-2u_{i,j}^{(n)}+u_{i-1,j}^{(n)}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}^{(n)}-2u_{i,j}^{(n)}+u_{i,j-1}^{(n)}}{h^2}-f(x_i,y_j)\end{aligned} \tag{8.12}$$

定常解を求めたいのであるから，時間ステップ k は大きい方がよいが，前章でやったような安定性の解析を空間方向２次元の場合に対して行うと，

$$k \leq \frac{h^2}{4} \tag{8.13}$$

の場合にのみ陽的差分法は安定であることが示される。そこで，$k = \frac{h^2}{4}$ とおくと，(8.12) 式は

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}\right) - \frac{h^2}{4} f_{i,j} \tag{8.14}$$

となる。ただし，$f_{ij} = f(x_i, y_j)$ である。これに基づいて $u_{ij}^{(n)}$ を順次計算していくことにより，ポアソン方程式の解 u_{ij} が求められる。

なお，k をこのように取ったときに不安定性が生じないことは，(8.14) 式の物理的な意味を考えてみれば直感的にも明らかである。(8.14) 式では，新しい値 $u_{ij}^{(n)}$ を周りの４点の平均値（とその点での熱量に相当する f_{ij} との和）として計算しているので，これを繰り返すことにより，関数は空間方向にどんどん滑らかになる。したがって，空間方向の振動が増大していくことは起こらないと考えられる。この解法を**ヤコビ法**と呼ぶ。また，このように徐々に真の解に近づく解を求めていく解法を**反復解法**と呼ぶ。

ガウス＝ザイデル法　ヤコビ法は物理的に意味のわかりやすい方法であるが，その収束は大変遅いことが知られている。そのため，収束を速める方法がいくつも考案されている。

(8.14) 式にしたがって $u_{ij}^{(n+1)}$ の計算をする場合は，たとえば $u_{1,1}^{(n+1)}, u_{1,2}^{(n+1)}, \ldots, u_{1,N-1}^{(n+1)}, u_{2,1}^{(n+1)}, u_{2,2}^{(n+1)}, \ldots$ のように，順番に計算を行っていくことが一般的である。すると，ある点 (i, j) に対して計算をする時点では，左の点 $(i-1, j)$ および下の点 $(i, j-1)$ については既に第 $n+1$ ステップでの値 $u_{i-1,j}^{(n+1)}$ および $u_{i,j-1}^{(n+1)}$ が計算されていることになる。

とすれば，(8.14) 式右辺のうち，これらの項については，第 n ステップでの値の代わりにこれらの新しい値を使えば，定常解への収束がより速まるのではないだろうか。この考えに基づくと，次の反復式ができる。

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)}\right) - \frac{h^2}{4} f_{i,j} \tag{8.15}$$

この反復解法を**ガウス＝ザイデル法**と呼ぶ。ポアソン方程式に対しては，ガウス＝ザイデル法はヤコビ法より速く収束することが証明されている。

SOR 法　ガウス＝ザイデル法の反復式は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(n+1)} &= u_{i,j}^{(n)} \\ &+ \left\{\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}\right) - u_{i,j}^{(n)} - \frac{h^2}{4} f_{i,j}\right\} \end{aligned} \tag{8.16}$$

このように書くと，$u_{ij}^{(n+1)}$ は $u_{ij}^{(n)}$ に $\{\ \}$ 内の修正項を加えて得られると見ることができる。

ところで，ガウス＝ザイデル法では，$u_{ij}^{(n)}$ が n につれて単調に増加または減少して一定値に近づく場合が多い。とすると，修正項の部分を ω (>1) 倍することで，定常解への収束をより速められる可能性がある。この考えに基づき，次の反復式ができる。

$$
\begin{aligned}
&u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} \\
&+\omega\left\{\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}\right) - u_{i,j}^{(n)} - \frac{h^2}{4} f_{i,j}\right\}
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

これを *SOR* **法**（Successive Over Relaxation 法）と呼ぶ。$\omega = 1$ のときはガウス＝ザイデル法であるが，ω を最適な値に選ぶことで，収束を 10 倍以上に速められる場合があることが知られている。また，最適な ω を理論的に決める方法も研究されている。