2003 年度　応用数学試験問題（杉原正顯，山本有作）

（A4 サイズの資料と電卓持込み可，各問題毎に解答用紙１枚使用）

問題 1（単小遠くん出題 ⇒ 成績 = A）
ニュートン法に基づき，より収束の速い非線形方程式の解法を設計することを考える。

(1) 関数 $f(x) = 0$ の解を求めるためのニュートン法の反復式を導け。ただし，初期値を x_0 とし，求める解 α は単根としてよい。

(2) 上記の場合にニュートン法が２次収束することを導け。

(3) 上記 (1) で求めたニュートン法の反復式を拡張して $f''(x)$ を含む反復式を求めよ。ただし，導出途中において (1) で求めたニュートン法の反復式を用いて近似を行ってよい。（ヒント：　素直に計算すると $(x - x_0)^2$ という項が出てくるが，その片方の因子をニュートン法の反復式を用いて近似する。）

(4) $f(x) = x^2 - 2$ として上記 (1) 及び (3) で求めた反復式を用いて $f(x) = 0$ の根を求め，収束性を比較せよ。ただし，初期値は $x_0 = 2$ とし，反復は２回でよい（x_2 まで求めればよい)。

問題 2
２階常微分方程式の初期値問題

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

に対する数値解法を考える。

(1) この方程式を連立１階常微分方程式に書き直せ。

(2) 上記 (1) の方程式に対するオイラー法の反復式（第 n ステップでの数値解がわかっているときに第 $n+1$ ステップでの数値解を求める式）を導出せよ。ただし，刻み幅を h とする。

(3) 上記 (1) の方程式に対するホイン法の反復式を導出せよ。ただし，刻み幅を h とする。

(4) 上記の方程式にホイン法を n ステップ実行して得られる解を n と h の関数として表せ。ホイン法による数値解では，上記の方程式の解析解が持つある重要な性質が失われるが，それは何か。
（ヒント：　行列のべき乗を計算するには対角化を行うこと。）

問題 3（築山知弘くん類題出題 ⇒ 成績 ≥ B）
ポアソン方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ の差分法による求解を考える。ただし，領域は $[0, 1]^2$ とし，境界条件は全境界で $u(x, y) = 0$ と与えられているものとする。また，x 方向，y 方向の格子点数をそれぞれ（境界を入れて）N とし，２階微分の近似には中心差分を使うとする。

(1) 格子点 $(x_i, y_j) = (\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$（$0 < i, j < N$）における差分近似の式を求めよ。ただし，$(x_i, y_j)$ における u の値を u_{ij} と書いてよい。

(2) $N = 5$ のとき，差分近似により得られる連立一次方程式 $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ の係数行列 A の形を具体的に書け。ただし，未知数は $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, \ldots, u_{33}$ の順に並んでいるとする。

(3) 上記 (2) の結果から推論して，一般にこの問題での係数行列はどのような性質を持っていると考えられるか。考えられる限り述べよ。

(4) 方程式 $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ をガウスの消去法で解く場合，上記 (3) の性質を使うと計算量はどれだけになるか。四則演算をそれぞれ１回と数え，N の関数として述べよ。ただし，最高次の項だけを考えればよい。