2003 年度　応用数学　第 2 回レポート課題

問題 1，2，3 は提出者全員解答のこと。問題 4 と 5 は，どちらかを選んで解答のこと。
11/25（火）までに 3 号館 381 号室に提出してください。

問題 1

(1) $f(x) = 0$ の解が 3 重根の場合，ニュートン法の収束次数，収束率はどのようになるか。授業でやった 2 重根の場合と同様にして調べよ。

(2) $f(x) = 0$ の解が m 重根（$m \geq 2$）の場合，ニュートン法の収束次数，収束率はどのようになるか。

問題 2

(1) $f(x) = \sin x$ を区間 $[0, 2\pi]$ で $n+1$ 個の点 $x_i = 2\pi i/n$ $(i = 0, \ldots, n)$ を使ってラグランジュ補間する。このとき，区間内における絶対誤差の上限を求めよ。

(2) $f(x) = \exp x$ を区間 $[0, 1]$ で $n+1$ 個の点 $x_i = i/n$ $(i = 0, \ldots, n)$ を使ってラグランジュ補間する。このとき，区間内における絶対誤差の上限を求めよ。

(3) 上記 (1)，(2) のそれぞれにおいて，絶対誤差を 10^{-3} 以下にするには n をどのように定めればよいか。

問題 3

(1) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ を台形公式により計算せよ。区間の数を $n = 2, 4, 8, 16$ と変化させて積分値を求め，真の値との誤差を刻み幅 $h = (\pi/2)/n$ の関数としてグラフに描け。

(2) 同様にしてシンプソン公式による積分値と誤差を計算せよ。

問題 4

(1) $n+1$ 個の点 $x_0 < x_1 < \cdots, x_n$ とそこでの関数値 $y_i = f(x_i)$（$i = 0, 1, \ldots, n$）が与えられたとき，ニュートンの補間公式により区間 $[x_0, x_n]$ 内の任意の点 x における関数の近似値 $f(x)$ を求めるプログラムを作成せよ。（次ページの「ニュートン補間のアルゴリズム」を参照）

(2) $f(x) = \exp x$，$x_i = i/n$（$i = 0, 1, \ldots, n$）とするとき，上記のプログラムを用い，n を 2 から 10 まで変えて $\exp(1/\sqrt{2})$ の近似値を計算せよ。n を増やすにつれて誤差がどのように変化するか調べよ。

問題 5

(1) $f(x) = \sin x$ を区間 $[0, \pi]$ で 4 個の点 $x = 0,\ \pi/3,\ 2\pi/3,\ \pi$ を使ってスプライン補間する。このとき，3 つの区間 $[0, \pi/3]$，$[\pi/3, 2\pi/3]$，$[2\pi/3, \pi]$ それぞれにおける補間の関数形を求めよ。

(2) 上記のスプライン補間を使って $x = \pi/6$ および $x = \pi/4$ における $\sin x$ の近似値を計算せよ。また，真の値との誤差を求めよ。

ニュートン補間のアルゴリズム

input $(n,\ x_0,\ldots,x_n,\ y_0,\ldots,y_n)$

$f_0(x)=a_0$ とおく。

$a_0=y_0$ とする。

（すなわち，$f_0(x_0)=y_0$ を満たすように a_0 を定める。）

for $i=1,\ n$

$f_i(x)=f_{i-1}(x)+a_i(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})$ とおく。

$a_i=\{y_i-f_{i-1}(x_i)\}\,/\,\{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})\}$ とする。

（すなわち，$f_i(x_i)=y_i$ を満たすように a_i を定める。）

end for

output $(a_0,\ldots,a_n)$

上記のアルゴリズムの第 i ステップ（$i=1,\ldots,n$）が終了した時点では，

$$f_i(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1}) \tag{1}$$

となっている。これは，$i+1$ 個の点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，…，(x_i,y_i) のすべてを通る i 次関数である。特に，アルゴリズム全体が終了した時点では，

$$f_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{2}$$

となる。これは $n+1$ 個の点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，…，(x_n,y_n) のすべてを通る n 次関数であり，求めるべき補間式となっている。

アルゴリズムの第 i ステップでは，$x=x_i$ に対して $f_{i-1}(x)$ の値を計算する必要がある。これを (1) 式をそのまま使って計算すると，$O(i^2)$ の計算量が必要である。そこで，次の補助変数 z_j（$j=0,\ldots,i-1$）を導入する。

$$z_j=a_j+a_{j+1}(x-x_j)+a_{j+2}(x-x_j)(x-x_{j+1})+\cdots+a_{i-1}(x-x_j)(x-x_{j+1})\cdots(x-x_{i-2}) \tag{3}$$

すると，

$$z_0 = f_{i-1}(x) \tag{4}$$

$$z_{i-1} = a_{i-1} \tag{5}$$

$$z_j = a_j+z_{j+1}(x-x_j) \qquad (j=0,1,\ldots,i-2) \tag{6}$$

が成り立つ（確認せよ）。そこで，(5) 式から始めて (6) 式を繰り返し使って z_0 を計算することにより，$O(i)$ の計算量で $f_{i-1}(x)$ が計算できる。

この計算法は，最終的な補間式 $f_n(x)$ の値を任意の x に対して求める場合にも用いる。