2003年度　応用数学　第3回レポート課題

問題1，2，3は提出者全員解答のこと。問題4，5，6はどれか1問を選んで解答のこと。
12/18（木）までに3号館381号室に提出してください。

問題1

(1) 関数 $f(x)$ に対し，3点 $z-h$，z，$z+h$ での値 $f(z-h)$，$f(z)$，$f(x+h)$ を使って2次のラグランジュ補間を行う。このときの補間多項式 $f_2(x)$ を求めよ。

(2) $f_2(x)$ を1階微分し，$x=z$ での微係数を求めよ。これが，中心差分による $f'(z)$ の式と一致することを示せ。

(3) $f_2(x)$ を2階微分し，$x=z$ での微係数を求めよ。これが，2階の中心差分による $f''(z)$ の式と一致することを示せ。

問題2

積分 $I=\int_a^b f(x)\,dx$ を刻み幅 h の台形公式により計算した値を I_h とする。I_h に対してリチャードソン加速を適用して得られる公式を求めよ。ただし，$n=(b-a)/h$ は偶数とする。この公式がシンプソン公式に他ならないことを示せ。

問題3

(1) 常微分方程式 $\frac{dy}{dx}=-y,\quad y(0)=1,\quad 0\le x\le 5$ をオイラー法で解け。ただし，刻み幅を $h=1/3$ とし，各点において解析解との誤差を求めよ。

(2) 上記の方程式を同じ刻み幅のホイン法で解け。また，各点において解析解との誤差を求め，(1) で求めた誤差と比較せよ。

問題4

(1) $f(x)$ の1階微分 $f'(x)$ を中心差分により近似することを考える。$f(x)$ の計算で生じる誤差が $|f(x)|\varepsilon$ 程度のとき，打切り誤差と丸め誤差との和を最小にする刻み幅 h を求めよ。ただし，$f^{(3)}(x)$ は $f(x)$ と同程度の大きさと仮定する。

(2) $f(x)$ の2階微分 $f''(x)$ を中心差分により近似することを考える。$f(x)$ の計算で生じる誤差が $|f(x)|\varepsilon$ 程度のとき，打切り誤差と丸め誤差との和を最小にする刻み幅 h を求めよ。ただし，$f^{(4)}(x)$ は $f(x)$ と同程度の大きさと仮定する。

(3) 上記 (1)，(2) において，$f'(x)$，$f''(x)$ の近似値に含まれる誤差はそれぞれどの程度か。

問題5

(1) 無限遠点で代数的に減少する関数 $f(x)$（$x\to\pm\infty$ のとき $f(x)\sim|x|^{\alpha}$）の積分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ を考える。この積分に変数変換 $x=\sinh(\frac{\pi}{2}\sinh t)$ を行い，それに対して台形公式を適用して得られる数値積分公式を求めよ。ただし，適用に当たっては台形公式の刻み幅を h とし，無限区間での積分を区間 $[-Nh,Nh]$ の積分で置き換えよ。

(2) 上記の数値積分公式を用いて $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ を計算せよ。ただし，$h=1,\ 0.5,\ 0.25$ の３通りとし，N は $Nh=4$ となるよう定めよ。また，真の解 $I=\pi$ との誤差を求め，誤差がどのように減少するかを考察せよ。

問題 6

(1) ２元連立１階微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=f(t,x,y) \\ \frac{dy}{dt}=g(t,x,y) \end{cases}$$

に対するホイン法のアルゴリズムを導出せよ。

(2) 上記の結果を用いて，２階の微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-x$ をホイン法によって解くアルゴリズムを導出せよ。