2003 年度　応用数学　第 4 回レポート課題

2004 年 1 月 13 日（月）までに 3 号館 381 号室に提出してください。

問題 1 常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$，$a \leq x \leq b$，$y(a) = y_0$ を刻み幅 h のオイラー法で解くことを考える。ただし，$f(x, y)$ はリプシッツ条件

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z| \quad (K \text{ は正の定数}) \tag{1}$$

を満たすとする。このとき，大域離散化誤差が $O(h)$ であることを次の手順で証明せよ。

(1) $x_i = a + ih$ とし，オイラー法で求めた $x = x_i$ における解を y_i とする。このとき，y_{i+1} を y_i を使って表せ。

(2) $x = x_i$ における真の解を $y(x_i)$ とすると，オイラー法の局所離散化誤差が $O(h^2)$ であることから，$y(x_{i+1})$ は $y(x_i)$ を使って次のように表せる。

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + ch^2 \tag{2}$$

$x = x_i$ における大域離散化誤差を $e_i = y(x_i) - y_i$ とするとき，(2) 式，上記設問 (1) の結果，およびリプシッツ条件 (1) を使うことにより，$|e_{i+1}|$ の上界を $|e_i|$ の式で表せ（ヒント：　三角不等式を使うこと）。

(3) 上記 (2) で求めた式を繰り返し使うことにより，$|e_i|$ の上限を i, c, k, h を使って表せ（ヒント:　$e_0 = 0$）。

(4) 上記 (3) の結果を変形することにより，オイラー法の大域離散化誤差が $O(h)$ であることを示せ（ヒント：　不等式 $1 + hx < e^{hx}$，および $ihK < (b - a)K$ を使うこと）。

問題 2

(1) 問題 1 で示したように，オイラー法の大域離散化誤差は $O(h)$ である。このことを用いて，刻み幅 h のオイラー法問題の結果と刻み幅 $2h$ のオイラー法の結果から，より精度の良い結果を得る方法（オイラー法に対するリチャードソン加速）を考案せよ。

(2) 常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = -y$，　$y(0) = 1$，　$0 \leq x \leq 5$ を (a) 刻み幅を $h = 1/3$ のオイラー法，(b) 刻み幅 $h = 1/6$ のオイラー法，(c) 前記 2 つの方法の結果に (1) の加速法を適用した方法，の 3 つの方法で解き，それぞれについて解析解との誤差を求めよ。なお，(a) については，第 3 回レポートの結果を利用してもよい。

問題 3

熱伝導方程式に対する陽的差分法において現れる $(M - 1) \times (M - 1)$ の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \tag{3}$$

の固有値，固有ベクトルを次の手順で求めよ。

(1) 固有値の 1 つを λ，対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}$，固有ベクトルの成分を v_j（$j = 1, 2, \ldots, M-1$）とするとき，v_{j-1}，v_j，v_{j+1} の満たす 3 項間の漸化式を求めよ。ただし，$v_0 = 0$，$v_M = 0$ としてよい。

(2) $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$（ただし i は虚数単位）とおき，境界条件 $v_0 = 0$，$v_M = 0$ より，$c_1 = c_2 = 0$ 以外の解が存在するための θ に関する条件を求めよ。また，これより固有値 λ を（$M-1$ 個）求めよ。

(3) 上記で求めた $M-1$ 個の固有値に対する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。

問題 4

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

の両辺を $x = a$ から $x = b$ まで積分し，左辺において微分と積分の順序を交換すると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u \, dx = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=b} - \kappa \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} \tag{5}$$

となる。左辺は区間 $[a, b]$ における熱量の時間的変化，右辺は両端 a と b から流入する熱量の和を表すから，この式は熱量保存則を表すと考えられる。陽的差分法においても同様の式変形を行うことにより，離散的な形の熱量保存則が成り立つことを示せ。