2004 年度　応用数学試験問題（山本有作）

（A4 サイズの資料と電卓持込み可，各問題毎に解答用紙１枚使用）

問題 1（古米孝平くん類題出題 $\Rightarrow$ 成績 $\geq$ B）
ニュートン法により非線形方程式 $f(x)=0$ を解くことを考える。このとき，次の問に答えよ。

(1) 解 $x=\xi$ において $f'(\xi)\neq 0$ が成り立つならば，ニュートン法は 2 次収束することを示せ。

(2) さらに $f''(\xi)=0$ が成り立つならば，ニュートン法は 3 次収束することを示せ。

(3) 正の数 a の 3 乗根を求める方法として，$x^3-a=0$ の解をニュートン法により求める方法と，$x^2-\frac{a}{x}=0$ の解をニュートン法で求める方法の 2 つが考えられる。各方法の収束性について論ぜよ。

問題 2
n 次実対称行列 A のある固有値 λ_i の近似値 ${\lambda_i}'$ が与えられたとき，λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ を求めることを考える。このための方法として，初期ベクトル $\mathbf{x}^{(0)}$ から始め，反復式

$$\mathbf{x}^{(m+1)}=(A-{\lambda_i}'I)^{-1}\,\mathbf{x}^{(m)} \qquad (I \text{ は単位行列}) \tag{1}$$

によって順次ベクトル $\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\ldots$ を計算してゆく方法（逆反復法）がある。これについて，次の問に答えよ。

(1) A の（正規直交化された）固有ベクトルを $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{n}$ とするとき，$\mathbf{x}^{(0)}$ を $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{n}$ で展開した式を書け。

(2) 小問 (1) の結果を用いて，$\mathbf{x}^{(m)}$ を $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{n}$ で展開した式を書け。

(3) $\mathbf{x}^{(m)}$ を規格化して得られるベクトル $\mathbf{y}^{(m)}=\mathbf{x}^{(m)}/\parallel\mathbf{x}^{(m)}\parallel_2$ が，$m\to\infty$ のとき $\mathbf{v}_i$ に収束することを示せ。ただし，λ_i は縮退のない固有値であり，かつ ${\lambda_i}'$ は他のどの固有値よりも λ_i に近いとする。

問題 3
2 次元の極座標に関するラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0 \qquad \left(1\leq r\leq 2,\quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\quad \text{境界条件は } u(r,\theta)=f(r,\theta)\right) \tag{2}$$

を差分法により解くことを考える。ただし，r，θ 方向の分割数をそれぞれ M，N とし，第 (i,j) 格子点の座標を $(r_i,\theta_j)=(1+i\Delta r,\ j\Delta\theta)$（$i=0,1,\ldots,M$，$j=0,1,\ldots,N$，$\Delta r=\frac{1}{M}$，$\Delta\theta=\frac{\pi}{2N}$），この点での関数値を $u_{i,j}$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 式 (2) の解を定常解として持つような，2 次元極座標に関する熱伝導方程式を書け。（ヒント： 授業で説明したポアソン方程式の解法を参考にせよ。）

(2) 小問 (1) の方程式を陽的差分法により離散化した式を書け。ただし，時間刻みを Δt とし，第 n ステップにおける第 (i,j) 格子点での値を $u_{i,j}^{(n)}$ とせよ。また，空間方向の 1 階微分，2 階微分の近似にはどちらも中心差分を用いよ。

(3) $\Delta t=1/\left\{\frac{2}{(\Delta r)^2}+\frac{2}{(r\Delta\theta)^2}\right\}$ のときに $u_{i,j}^{(n+1)}$ を求める式を書け。

(4) 小問 (3) の式を使って $\left\{u_{i,j}^{(0)}\right\},\left\{u_{i,j}^{(1)}\right\},\left\{u_{i,j}^{(2)}\right\},\ldots$ を収束するまで計算すると，元のラプラス方程式の解を安定に求めることができる。この解法が安定な理由を，物理的な解釈を用いて説明せよ。