

問題 1

(1) ニュートン法による近似解 x_n と真の解 ξ との差を $e_n = x_n - \xi$ とすると,

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\xi + e_n) \\ &= f(\xi) + f'(\xi)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi)e_n^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)e_n^3 + O(e_n^4) \\ &= f'(\xi)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi)e_n^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)e_n^3 + O(e_n^4) \end{aligned} \quad (1)$$

また,

$$f'(x_n) = f'(\xi) + f''(\xi)e_n + \frac{1}{2}f'''(\xi)e_n^2 + O(e_n^3) \quad (2)$$

ニュートン法の反復式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3)$$

の両辺から ξ を引いて (1), (2) 式を代入すると,

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\simeq e_n - \frac{f'(\xi)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi)e_n^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)e_n^3}{f'(\xi) + f''(\xi)e_n + \frac{1}{2}f'''(\xi)e_n^2} \\ &= \frac{f'(\xi)e_n + f''(\xi)e_n^2 + \frac{1}{2}f'''(\xi)e_n^3 - f'(\xi)e_n - \frac{1}{2}f''(\xi)e_n^2 - \frac{1}{6}f'''(\xi)e_n^3}{f'(\xi) + f''(\xi)e_n + \frac{1}{2}f'''(\xi)e_n^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)e_n^2 + \frac{1}{3}f'''(\xi)e_n^3}{f'(\xi) + f''(\xi)e_n + \frac{1}{2}f'''(\xi)e_n^2} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $f'(\xi) \neq 0$ であり, e_n は微小量だから, 上式の分子・分母において最高次の項だけを取ると,

$$e_{n+1} \simeq \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} e_n^2 \quad (5)$$

となる。従ってニュートン法は 2 次収束する。

(2) $f'(\xi) \neq 0$ かつ $f''(\xi) = 0$ の場合は, 式 (4) において分子の最高次の項は $\frac{1}{3}f'''(\xi)e_n^3$, 分母の最高次の項は $f'(\xi)$ となる。そこで, これらの項のみを残すと,

$$e_{n+1} \simeq \frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)} e_n^3 \quad (6)$$

となる。従ってこの場合, ニュートン法は 3 次収束する。

(3) $f(x) = x^3 - a$ とすると, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ だから, 解 $x = \sqrt[3]{a}$ においては $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ である。従って小問 (1) より, ニュートン法は 2 次収束する。一方, $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ とすると, $f'(x) = 2x + \frac{a}{x^2}$, $f''(x) = 2(1 - \frac{a}{x^3})$ だから, 解 $x = \sqrt[3]{a}$ において $f'(x) \neq 0$, $f''(x) = 0$ となる。従って小問 (2) より, ニュートン法は 3 次収束する。したがって, $x^2 - \frac{a}{x} = 0$ の解をニュートン法で求める方法のほうが, 収束が速い。

問題 2

(1) $\mathbf{x}^{(0)}$ は $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ を用いて次のように展開できる。

$$\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{v}_j \quad (7)$$

(2) $\mathbf{x}^{(m)}$ の定義と小問 (1) の結果より,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(m)} &= (A - \lambda_i' I)^{-1} \mathbf{x}^{(m-1)} \\
&= \cdots = (A - \lambda_i' I)^{-m} \mathbf{x}^{(0)} \\
&= \sum_{j=1}^n c_j (A - \lambda_i' I)^{-m} \mathbf{v}_j \\
&= \sum_{j=1}^n c_j (\lambda_j - \lambda_i')^{-m} \mathbf{v}_j
\end{aligned} \tag{8}$$

(3) 小問 (2) の結果を $\mathbf{y}^{(m)}$ の定義式に代入し, $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^n$ が正規直交系をなすことを使うと,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(m)} &= \frac{\sum_{j=1}^n c_j (\lambda_j - \lambda_i')^{-m} \mathbf{v}_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k c_j (\lambda_k - \lambda_i')^{-m} (\lambda_j - \lambda_i')^{-m} \mathbf{v}_k^t \mathbf{v}_j}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n c_j (\lambda_j - \lambda_i')^{-m} \mathbf{v}_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n c_j^2 (\lambda_j - \lambda_i')^{-2m}}} \\
&= \frac{\mathbf{v}_i + \sum_{j \neq i} \frac{c_j}{c_i} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_i'}{\lambda_j - \lambda_i'} \right)^m \mathbf{v}_j}{\sqrt{1 + \sum_{j \neq i} \left(\frac{c_j}{c_i} \right)^2 \left(\frac{\lambda_i - \lambda_i'}{\lambda_j - \lambda_i'} \right)^{2m}}}
\end{aligned} \tag{9}$$

となる。ここで, λ_i は縮退のない固有値であり, かつ λ_i' は他のどの固有値よりも λ_i に近いから, $j \neq i$ のとき,

$$|\lambda_i - \lambda_i'| < |\lambda_j - \lambda_i'| \tag{10}$$

が成り立つ。したがって, 式 (9) において分子の第 2 項および分母の平方根中の第 2 項は $m \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束し,

$$\mathbf{y}^{(m)} \rightarrow \mathbf{v}_i \quad (m \rightarrow \infty \text{ のとき}) \tag{11}$$

となる。

問題 3

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{12}$$

(2)

$$\frac{u_{i,j}^{(n+1)} - u_{i,j}^{(n)}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \frac{u_{i+1,j}^{(n)} - u_{i-1,j}^{(n)}}{2\Delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{u_{i,j+1}^{(n)} - 2u_{i,j}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}}{(\Delta \theta)^2} \tag{13}$$

(3) 式 (13) を $u_{i,j}^{(n+1)}$ について解くと, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{(n+1)} &= \left\{ 1 - \left(\frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{(r\Delta \theta)^2} \right) \Delta t \right\} u_{i,j}^{(n)} \\
&\quad + \left\{ \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \right) u_{i+1,j}^{(n)} + \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) u_{i-1,j}^{(n)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(r\Delta \theta)^2} u_{i,j+1}^{(n)} + \frac{1}{(r\Delta \theta)^2} u_{i,j-1}^{(n)} \right\} \Delta t
\end{aligned} \tag{14}$$

特に $\Delta t = 1 / \left(\frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{(r\Delta\theta)^2} \right)$ のときは、右辺の $u_{i,j}^{(n)}$ の項が消えて、

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(n+1)} = & \left\{ \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \right) u_{i+1,j}^{(n)} + \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) u_{i-1,j}^{(n)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(r\Delta\theta)^2} u_{i,j+1}^{(n)} + \frac{1}{(r\Delta\theta)^2} u_{i,j-1}^{(n)} \right\} \left\{ \frac{2}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{(r\Delta\theta)^2} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

(4) 式 (15) において、右辺の $u_{i+1,j}^{(n)}$, $u_{i-1,j}^{(n)}$, $u_{i,j+1}^{(n)}$, $u_{i,j-1}^{(n)}$ の項の係数はすべて正であり ($1 \leq r \leq 2$ で $\Delta r < 1$ だから $u_{i+1,j}^{(n)}$ の係数も正であることに注意), かつ、加えると 1 になる。したがって、 $u_{i,j}^{(n+1)}$ を時刻 $(n+1)\Delta t$ での格子点 (r_i, θ_j) の温度と考えると、これは時刻 $n\Delta t$ での隣り合う 4 点の温度の加重平均となっている。これより、 n が大きくなるにつれて領域内での温度は平滑化されていき、定常的な温度分布、すなわち元のラプラス方程式の解へと安定に近づいていくことがわかる。