

2004 年度 応用数学 第 2 回レポート 課題

12/10 (金) までに 3 号館 381 号室に提出してください。

問題 1 と 2 は提出者全員が解答すること。問題 3 と 4 はどちらかを選んで解答すること。

問題 1

1 階常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2, \quad y(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 10) \quad (1)$$

を考える。

- (1) 方程式 (1) の数値解をオイラー法により求めるプログラムを書け。ただし区間 $[0, 10]$ を n 分割して計算を行うとする。言語は何でもよい。
- (2) 方程式 (1) の数値解をホイン法により求めるプログラムを書け。ただし区間 $[0, 10]$ を n 分割して計算を行うとする。言語は何でもよい。
- (3) 上記 (1), (2) で作成したプログラムを実行し, 数値解を xy 平面上にプロットせよ。ただし, $n = 10$ とする。また, 解析解 $y = \tanh x$ もプロットし, 両解法の誤差について論ぜよ。なお, もし計算機が利用できない場合は, (1), (2) のプログラムに基づき, 電卓などで計算を行ってもよい。

問題 2

数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = b_0 + b_1 \lambda_1^n + b_2 \lambda_2^n + b_3 \lambda_3^n + \cdots \quad (2)$$

と表され, $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots$ であるとする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b_0$ の値を加速法により求めることを考える。

- (1) いま, λ_1 の値が既知であるとする。このとき, a_n と a_{n+1} の線形結合を作ることにより λ_1 のべき乗の項を消去し, a_n より速く b_0 に収束する数列 c_n を作れ。(ヒント: これは講義でやったリチャードソン加速法と同じものである。)
- (2) 次に, λ_1 の値が未知である場合を考える。このとき, λ_1 は

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} \quad (3)$$

と表せることを示せ。

- (3) 上記 (2) の結果より, 有限の n に対し, $\lambda_1 \simeq (a_{n+2} - a_{n+1}) / (a_{n+1} - a_n)$ と近似できる。これを (1) の c_n の式に代入することにより, λ_1 がわからない場合でも a_n より速く b_0 に収束する数列を作れ。このようにして数列の収束を加速することをエイトケン加速と呼ぶ。

問題 3

両端点で特異性を持つ定積分

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x} \sqrt[4]{1-x}} dx \quad (4)$$

を二重指数型数値積分公式を用いて次の手順により計算せよ。

- (1) 積分 (4) に対して変数変換 $x = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)$ を行い, (4) を $(-\infty, \infty)$ の積分に直せ。
- (2) 変換された被積分関数は, $t \rightarrow \pm\infty$ のとき特異性を持たないことを示せ。
(ヒント: 公式 $\frac{1}{\cosh^2 u} = 1 - \tanh^2 u = (1 + \tanh u)(1 - \tanh u)$ を用いて特異性の原因となる (4) の分母の因子を約分により除去せよ。)
- (3) 変換された積分を台形公式により計算せよ。ただし, 被積分関数が急速に減衰することを考慮して積分区間を $[-4.0, 4.0]$ とし, 分割数を 8 から 256 まで 2 倍ずつ変化させて積分値の収束性を調べよ。なお, 計算には, (2) で求めた特異性を除去した式を使うこと。

問題 4

$f(x)$ を周期 2π を持つ C^m 級関数とし, そのフーリエ級数展開

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (5)$$

が一樣収束するとする。このとき, $f(x)$ の 1 周期に渡る積分

$$I = \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (6)$$

を台形公式で近似したときの誤差を次の手順により評価せよ。

- (1) $I = 2\pi c_0$ であることを示せ。(ヒント: フーリエ級数が一樣収束することより, 項別積分してよいことを用いる。)
- (2) 区間 $[0, 2\pi]$ を n 分割した台形公式による I の近似値を I_n とするとき,

$$I_n - I = 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} c_{nl} \quad (7)$$

となることを示せ。

- (3) 「関数 $f(x)$ が C^m 級ならば $c_k = o(k^{-m})$ 」($o(k^{-m})$ は k^{-m} より速く 0 に近づくことを示す) という定理がある。これを用いて, 誤差 $|I_n - I|$ が刻み幅 $h = 2\pi/n$ の何乗のオーダーで減少するかを調べよ。

$f(x)$ が解析関数の場合は, C^∞ 級関数でもあるから, 小問 (3) の結果より, 誤差 $|I_n - I|$ は h の任意のべき乗より速く 0 に収束する。これにより, 周期的な解析関数の 1 周期に渡る積分を台形公式により計算した場合に異常な高精度が得られる理由が理解できる。