

2004 年度 応用数学 第 3 回レポート 課題

1/11 (火) までに 3 号館 381 号室に提出してください。

問題 1

次の連立一次方程式をガウスの消去法により解け。ただし、(2) では必要ならばピボット選択を行うこと。

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 33 \\ 45 \end{pmatrix}$$

問題 2

クランク=ニコルソン法を一般化し、空間方向の差分を時刻 t_j と t_{j+1} での値の加重平均を使って計算する次のような差分解法を考える。

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \kappa \left\{ c \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + (1-c) \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right\} \quad (1)$$

- (1) 式 (1) は変数 $u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \dots, u_{M-1,j+1}$ に関する連立一次方程式である。この連立一次方程式を行列形式で書け。(ヒント：講義ノートの陰的差分法、クランク=ニコルソン法の例を参考にせよ。)
- (2) 上記の連立一次方程式を、講義ノートの陽的差分法の項で導入した行列 A 、ベクトル $\mathbf{b}_j$, $\mathbf{b}_{j+1}$, $\mathbf{u}_j$, $\mathbf{u}_{j+1}$ を使って表せ。
- (3) 上記の式を $\mathbf{u}_{j+1}$ について形式的に解いたとき、 $\mathbf{u}_j$ の係数の行列を C とする (クランク=ニコルソン法の場合は $C = (3I - A)^{-1}(I + A)$ である)。 C を A と c により表し、その固有値を求めよ。
- (4) この解法は、 $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$ のとき無条件安定であることを示せ。

問題 3

- (1) 講義ノートに載っている SOR 法のアルゴリズムを、完全なプログラムにせよ。言語は何でもよい。
- (2) 各ステップにおける (ω を除いた) 修正量

$$w_{i,j}^{(n)} \equiv \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} \right) - u_{i,j}^{(n)} - \frac{h^2}{4} f_{i,j}$$

は解が収束するにつれて 0 に近づくため、 $w^{(n)} \equiv \max_{1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-1} |w_{i,j}^{(n)}|$ を収束の基準として用いることができる。上記のプログラムに、 $w^{(n)}$ を計算する部分を付け加えよ。

- (3) 単位正方形領域 $[0, 1]^2$ 上でのポアソン方程式に対し、右辺を $f(x, y) = -1$ 、境界条件を全境界で 0、初期値を $u_{ij}^{(0)} = 0$ ($1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-1$)、 $N = 50$, $\omega = 1.9$ として上記のプログラムを 200 ステップ実行し、 $w^{(n)}$ の減少の様子をグラフに描け。ただし、計算機が利用できない場合は、 $N = 3$ として 10 ステップ実行すればよい。