

2006 年度 応用数学 中間試験問題

(A4 用紙 1 枚表裏の自筆メモと電卓持込み可 , 各問題毎に解答用紙 1 枚使用)

問題 1

ニュートン法により 3 次方程式 $x^3 - 3x + 2 = 0$ を解くことを考える。このとき , 次の間に答えよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とし , 反復式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

を使って $x_0 = 2$ として計算したところ , 表 1 のような結果が得られた。ただし , 表中の e_n は真の解 $x = 1$ との誤差 $e_n = x_n - 1$ である。

表 1: 通常のニュートン法による結果

n	x_n	e_n
0	2	1.000000000
1	1.555555556	0.555555556
2	1.297906602	0.297906602
3	1.155390199	0.155390199
4	1.079562210	0.079562210
5	1.040288435	0.040288435
6	1.020276810	0.020276810
7	1.010172323	0.010172323
8	1.005094741	0.005094741
9	1.002549528	0.002549528
10	1.001275305	0.001275305

ニュートン法は通常 , 2 次収束すると言われるが , 表 1 では収束率 $\frac{1}{2}$ の 1 次収束となっている。これはなぜか。 e_{n+1} と e_n の関係式を導くことにより , 理論的に説明せよ。

(2) 通常の反復式の代わりに修正した反復式

$$x_{n+1} = x_n - 2 \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2)$$

を使って $x_0 = 2$ として計算したところ , 表 2 のような結果が得られた。

表 2: 修正したニュートン法による結果

n	x_n	e_n
0	2	1.000000000
1	1.111111111	0.111111111
2	1.001949318	0.001949318
3	1.000000633	6.33382E-07
4	1.000000000	1.92696E-014

この場合はほぼ 2 次収束となっている。これはなぜか。小問 (1) と同様にして , 理論的に説明せよ。
(ヒント : e_{n+1} に対する式の右辺で , 分母は e_n の 2 次 , 分子は 3 次までの項を取って計算せよ。)

問題 2

- (1) $f(x) = \exp x$ を区間 $[0, 1]$ で $n + 1$ 個の点 $x_j = \frac{j}{n}$ ($j = 0, 1, \dots, n$) を使ってラグランジュ補間する。
このとき, 区間内における絶対誤差の上限を求めよ。
- (2) 絶対誤差を 10^{-3} 以下にするには, n をどのように定めればよいか。

問題 3

答がわかっている次の積分を用いて, 台形公式とシンプソン公式の精度を理論的に比較することを考える。

$$I = \int_0^1 e^x dx \quad (3)$$

ただし, 両公式とも区間 $[0, 1]$ を n 等分 (n は偶数) して計算する。また, $h \equiv \frac{1}{n}$ とする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 台形公式による I の近似値 $I^{(1)}$ を計算し, h の関数として表せ。
- (2) シンプソン公式による I の近似値 $I^{(2)}$ を計算し, h の関数として表せ。
- (3) 台形公式の誤差 $I^{(1)} - I$, シンプソン公式の誤差 $I^{(2)} - I$ を計算し, それぞれ h の何乗のオーダーになるか調べよ。ただし, 必要ならば次の近似式を用いてよい。

$$\begin{aligned} \frac{h}{e^h - 1} &\simeq 1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{12}h^2 - \frac{1}{720}h^4 \\ \frac{1 + 2e^h}{e^{2h} - 1} \cdot h &\simeq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}h + \frac{1}{120}h^4 \end{aligned}$$