

2006 年度 応用数学 中間試験解答

問題 1

- (1) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ であるから, $f(x) = 0$ は $x = 1$ で重根を持つ。一般に, $f(x) = 0$ の解 $x = \xi$ が重根であるとき, $f(\xi) = f'(\xi) = 0$ となる。このとき, ニュートン法の反復式の両辺から ξ を引いて誤差 e_n に対する漸化式を求めると, 次のようになる。

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= e_n - \frac{f(\xi + e_n)}{f'(\xi + e_n)} \\
 &= e_n - \frac{f(\xi) + e_n f'(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\
 &= \frac{e_n f'(\xi) + e_n^2 f''(\xi) - f(\xi) - e_n f'(\xi) - \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + O(e_n^3)}{e_n f''(\xi) + O(e_n^2)} \\
 &\simeq \frac{1}{2} e_n
 \end{aligned} \tag{1}$$

よって, この場合, ニュートン法は収束率 $\frac{1}{2}$ の 1 次収束をする。これが表 1 のような結果が得られた理由である。

- (2) 修正した反復式の両辺から真の解 ξ を引いて誤差 e_n に対する漸化式を求め, 分母は e_n の 2 次, 分子は 3 次までの項を取り, $f(\xi) = f'(\xi) = 0$ を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= e_n - 2 \cdot \frac{f(\xi + e_n)}{f'(\xi + e_n)} \\
 &= e_n - 2 \cdot \frac{f(\xi) + e_n f'(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi) + \frac{1}{6} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f'''(\xi) + O(e_n^3)} \\
 &= \frac{e_n f'(\xi) + e_n^2 f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^3 f'''(\xi) - 2f(\xi) - 2e_n f'(\xi) - e_n^2 f''(\xi) - \frac{1}{3} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{f'(\xi) + e_n f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f'''(\xi) + O(e_n^3)} \\
 &= \frac{\frac{1}{6} e_n^3 f'''(\xi) + O(e_n^4)}{e_n f''(\xi) + \frac{1}{2} e_n^2 f'''(\xi) + O(e_n^3)} \\
 &\simeq \frac{\frac{1}{6} e_n^3 f'''(\xi)}{e_n f''(\xi)} \\
 &\simeq \frac{1}{6} \frac{f'''(\xi)}{f''(\xi)} e_n^2
 \end{aligned} \tag{2}$$

よって, 修正した反復式を使うと, 2 次収束となる。

注意 この修正版ニュートン法を使って 2 次収束となるのは, 2 重根のときだけである。単根のとき, 3 重根以上のときは, 通常のニュートン法より収束性が悪くなる。

問題 2

- (1) 補間すべき関数を $f(x)$, n 次のラグランジュ補間を $f_n(x)$ とすると, $x_0 \leq x \leq x_n$ を満たす任意の x について, 次の絶対誤差の評価式が成り立つ。

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} |f^{(n+1)}(\xi)| |x_n - x_0|^{n+1} \tag{3}$$

いま, $f(x) = \exp x$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$ より, $\max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} |f^{(n+1)}(\xi)| = e$ である。また, $x_n - x_0 = 1$ である。よって,

$$|f(x) - \exp x| \leq \frac{e}{(n+1)!} \tag{4}$$

となる。

- (2) $\frac{e}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$ となる最小の n を求めると, $n = 6$ となる。

問題 3

- (1) 台形公式では, 点 $x_0 = 0, x_n = 1$ での関数値に重み $\frac{h}{2}$, それ以外の点 $x_j = jh$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) での関数値に重み h を掛けて加えるから, 次のようになる。

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jh} + \frac{1}{2} \cdot e \right) h \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{jh} - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} \right) h \\ &= \left(\frac{1-e}{1-e^h} - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} \right) h \end{aligned} \quad (5)$$

- (2) シンプソン公式では, 両端の点での関数値に重み $\frac{h}{3}$, 点 $x_1, x_3, \dots, x_{n-1}$ での関数値に重み $\frac{4}{3}h$, 点 $x_2, x_4, \dots, x_{n-2}$ での関数値に重み $\frac{2}{3}h$ を掛けて加えるから, 次のようになる。

$$\begin{aligned} I^{(2)} &= \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{3} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} e^{(2j-1)h} + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} e^{2jh} + \frac{1}{3} \cdot e \right) h \\ &= \left(\frac{4}{3} e^h \sum_{j'=0}^{\frac{n}{2}-1} e^{2j'h} + \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} e^{2jh} - \frac{1}{3} + \frac{e}{3} \right) h \\ &= \left\{ \frac{2}{3} (1 + 2e^h) \cdot \frac{1-e}{1-e^{2h}} - \frac{1}{3} + \frac{e}{3} \right\} h \end{aligned} \quad (6)$$

- (3) 真の積分値は $I = e - 1$ であるから, 小問 (1) の結果と与えられた近似式を使うと, 台形公式の誤差は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} I^{(1)} - I &= (e-1) \left(\frac{h}{e^h - 1} + \frac{h}{2} - 1 \right) \\ &\simeq (e-1) \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{720} + \frac{h}{2} - 1 \right) \\ &= (e-1) \left(\frac{h^2}{12} - \frac{h^4}{720} \right) \\ &\simeq (e-1) \cdot \frac{h^2}{12} \end{aligned} \quad (7)$$

よって, 台形公式の誤差は h^2 のオーダーとなる。

一方, 小問 (2) の結果と与えられた近似式より, シンプソン公式の誤差は次のようになる。

$$\begin{aligned} I^{(2)} - I &= (e-1) \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{(1+2e^h)h}{e^{2h} - 1} + \frac{h}{3} - 1 \right\} \\ &\simeq (e-1) \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{h}{2}h + \frac{h^4}{120} \right) + \frac{h}{3} - 1 \right\} \\ &= (e-1) \cdot \frac{h^4}{180} \end{aligned} \quad (8)$$

よって, シンプソン公式の誤差は h^4 のオーダーとなる。