

2006 年度 応用数学 期末試験問題

(A4 用紙 1 枚表裏の自筆メモと電卓持込み可 , 各問題毎に解答用紙 1 枚使用)

問題 1

- (1) 関数 $f(x)$ に対し , 3 点 $z-h, z, z+h$ での値 $f(z-h), f(z), f(z+h)$ を使って 2 次のラグランジュ補間を行う。このときの補間多項式 $f_2(x)$ を求めよ。
- (2) $f_2(x)$ を 1 階微分し , $x = z$ での微係数を求めよ。これが , 中心差分による $f'(z)$ の式と一致することを示せ。
- (3) $f_2(x)$ を 2 階微分し , $x = z$ での微係数を求めよ。これが , 2 階の中心差分による $f''(z)$ の式と一致することを示せ。

問題 2

常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = -y, \quad y(0) = 1 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (1)$$

に対し , 区間 $[0, 1]$ を n 等分してオイラー法とホイン法をそれぞれ適用し , その精度を理論的に比較することを考える。以下 , $h \equiv \frac{1}{n}$ とするとき , 次の問に答えよ。

- (1) オイラー法の第 i ステップにおける近似解 ($x = ih$ での近似解) を $y_i^{(1)}$ とする。 $y_i^{(1)}$ を i と h の式として表せ。
- (2) ホイン法の第 i ステップにおける近似解を $y_i^{(2)}$ とする。 $y_i^{(2)}$ を i と h の式として表せ。
- (3) $x = 1$ におけるオイラー法の大域離散化誤差 $e_n^{(1)} \equiv y_n^{(1)} - y(1)$, ホイン法の大域離散化誤差 $e_n^{(2)} \equiv y_n^{(2)} - y(1)$ を計算し , それぞれ h の何乗のオーダーになるか調べよ。ただし , $y(x)$ を真の解とする。また , 必要ならば次の近似式を用いてよい。

$$(1-h)^{\frac{1}{h}} \simeq e^{-1} \left(1 - \frac{h}{2} - \frac{5}{24}h^2 \right)$$
$$\left(1 - h + \frac{h^2}{2} \right)^{\frac{1}{h}} \simeq e^{-1} \left(1 + \frac{h^2}{6} \right)$$

ここで e は自然対数の底である。

問題 3

2次元正方領域 $[0, 1]^2$ における熱伝導方程式の初期値問題を陰的差分法により解くことを考える。ただし、境界条件はすべて第1種とする。このとき、領域を $(N+1) \times (N+1)$ に分割すると、内点の個数は $n \equiv (N-1)^2$ であるから、時刻 j における変数ベクトル $\mathbf{u}_j$ は n 次元のベクトルとなる。陰的差分法では、 $\mathbf{u}_j$ から $\mathbf{u}_{j+1}$ を求めるために連立一次方程式

$$B\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \mathbf{b}_{j+1} \quad (2)$$

($\mathbf{b}_{j+1}$ は境界条件により定まる定数ベクトル) を解く必要があるが、今の場合、係数行列 B は半帯幅 $N-1$ の帯行列となることが知られている。

いま、初期値 $\mathbf{u}_0$ から出発し、式 (2) を繰り返し解くことにより第 m ステップ目の近似値 $\mathbf{u}_m$ を求める。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 特に何も工夫せずにガウスの消去法を用いて計算を行った場合、 $\mathbf{u}_m$ を求めるために必要な演算量を n と m の式として表せ。
- (2) B が帯行列であることを利用して演算量を削減した場合、 $\mathbf{u}_m$ を求めるために必要な演算量を n と m の式として表せ。ただし、 $N-1 \simeq \sqrt{n}$ と近似せよ。
- (3) さらに、 B が j によらないことを利用すると、どのような演算量の削減方法が適用できるかを述べよ。また、その方法と小問 (2) の方法とを併用した場合に、 $\mathbf{u}_m$ を求めるために必要な演算量を n と m の式として表せ。
- (4) $N = 100$, $m = 1000$ のとき、小問 (1), (2), (3) の計算法による演算量の概算値をそれぞれ有効数字 2 桁で求めよ。