2006 年度　応用数学　期末試験解答

問題 1

(1) 補間点

$$
\begin{aligned}
&x_0 = z - h, \quad x_1 = z, \quad x_2 = z + h \\
&y_0 = f(z-h), \quad y_1 = f(z), \quad y_2 = f(x+z)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

に対する 2 次のラグランジュ補間多項式は,

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \\
&= \frac{(x-z)(x-z-h)}{-h\cdot(-2h)}f(z-h) + \frac{(x-z+h)(x-z-h)}{h\cdot(-h)}f(z) + \frac{(x-z+h)(x-z)}{2h\cdot h}f(z+h) \\
&= \frac{1}{2h^2}\left[\{f(z+h)-2f(z)+f(z-h)\}(x-z)^2\right. \\
&\qquad \left. +h\{f(z+h)-f(z-h)\}(x-z)+2h^2f(z)\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となる。

(2) $f_2(x)$ の 1 階微分は,

$$
{f_2}'(x) = \frac{1}{2h^2}\left[2\{f(z+h)-2f(z)+f(z-h)\}(x-z)+h\{f(z+h)-f(z-h)\}\right] \tag{3}
$$

であるから，$x = z$ での微係数を求めると,

$$
{f_2}'(z) = \frac{f(z+h)-f(z-h)}{2h} \tag{4}
$$

となり，中心差分による $f'(z)$ の式と一致する。

(3) $f_2(x)$ の 2 階微分は,

$$
{f_2}''(x) = \frac{f(z+h)-2f(z)+f(z-h)}{h^2} \tag{5}
$$

であるから，$x = z$ での微係数を求めると,

$$
{f_2}''(z) = \frac{f(z+h)-2f(z)+f(z-h)}{h^2} \tag{6}
$$

となり，2 階の中心差分による $f''(z)$ の式と一致する。

問題 2

(1) 常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(y)$ に対するオイラー法の公式 $y_{i+1}^{(1)} = y_i^{(1)} + hf(y_i^{(1)})$ を適用すると,

$$
y_{i+1}^{(1)} = y_i^{(1)} - hy_i^{(1)} = (1-h)y_i^{(1)} \tag{7}
$$

となる。この漸化式を初期条件 $y_0^{(1)} = 1$ の下で解くと,

$$
y_i^{(1)} = (1-h)^i \tag{8}
$$

となる。

(2) ホイン法の公式 $\tilde{y}_{i+1} = y_i^{(2)} + hf(y_i^{(2)})$，$y_{i+1}^{(2)} = y_i^{(2)} + \frac{h}{2}\left\{f(y_i^{(2)}) + f(\tilde{y}_{i+1})\right\}$ を用いると，

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i^{(2)} + \frac{h}{2}\left\{-y_i^{(2)} - \left(y_i^{(2)} - hy_i^{(2)}\right)\right\} = \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) y_i^{(2)} \tag{9}$$

となる。この漸化式を初期条件 $y_0^{(2)} = 1$ の下で解くと，

$$y_i^{(2)} = \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)^i \tag{10}$$

となる。

(3) $y(1) = 1$，$n = \frac{1}{h}$ であるから，小問 (1)，(2) の結果より，

$$e_n^{(1)} = (1-h)^{\frac{1}{h}} - e^{-1} \simeq -e^{-1}\left(\frac{h}{2} + \frac{5}{24}h^2\right) \simeq -\frac{h}{2e} \tag{11}$$

$$e_n^{(2)} = \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right)^{\frac{1}{h}} - e^{-1} \simeq e^{-1} \cdot \frac{h^2}{6} = \frac{h^2}{6e} \tag{12}$$

となる。よってオイラー法の大域離散化誤差は h のオーダー，ホイン法の大域離散化誤差は h^2 のオーダーである。

問題 3

(1) 1 回の連立一次方程式を解くのに必要な演算量は，行列の消去演算（上三角行列への変形）と前進消去・後退代入を合わせて約 $\frac{2}{3}n^3 + 2n^2$ である。これを m 回行うから，総演算量は

$$\left(\frac{2}{3}n^3 + 2n^2\right) m \tag{13}$$

となる。

(2) 半帯幅 b の帯行列の場合，ガウス消去法の各ステップで消去を行う領域は $b \times b$ の大きさとなるので，ステップあたりの演算量は乗算・減算あわせて $2b^2$ である。したがって，行列の消去演算の演算量は $2b^2n$ となる。一方，前進消去・後退代入においても，消去・代入すべき項の数が b 個となるので，各ステップの演算量はそれぞれ $2b$ となる。また，前進消去・後退代入 1 回あたりの演算量は，それぞれ $2bn$ となる。連立一次方程式は m 回解くから，総演算量は

$$\left(2b^2n + 4bn\right) m \simeq \left(2n^2 + 4n\sqrt{n}\right) m \tag{14}$$

となる。

(3) 係数行列 B が j によらないことより，上三角行列への変形は最初の 1 回だけ行い，前進消去・後退代入のみを m 回行えばよい。小問 (2) の方法に対してさらにこの演算量削減法を適用すると，総演算量は

$$2b^2n + 4bnm \simeq 2n^2 + 4mn\sqrt{n} \tag{15}$$

となる。

(4) $N = 100$，$m = 1000$ のとき，小問 (1)，(2)，(3) の計算方法による演算量は，

- 小問 (1)： $\left\{\frac{2}{3} \cdot \left(10^4\right)^3 + 2 \cdot \left(10^4\right)^2\right\} \cdot 10^3 \simeq 6.7 \times 10^{14}$
- 小問 (2)： $\left\{2 \cdot \left(10^4\right)^2 + 4 \cdot 10^4 \cdot 10^2\right\} \cdot 10^3 \simeq 2.0 \times 10^{11}$
- 小問 (3)： $2 \cdot \left(10^4\right)^2 + 4 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^2 \simeq 4.2 \times 10^9$

となる。したがって，2 つの工夫をすることにより，何も工夫しない場合に比べて演算量を 10 万分の 1 に削減できることがわかる。