2006 年度　応用数学　第 1 回レポート 課題

2006 年 11 月 6 日（月）の授業終了時に提出してください。それ以前に提出する場合は，工学部 3 号館南 305 号室までお願いします。

問題 1

2 進浮動小数点計算により，無限級数の和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \tag{1}$$

を近似的に求めることを考える。ただし，加算は最初の項から順番に行うとする。

(1) 単精度で計算を行った場合，初めて情報落ちが生じるのは n がいくつのときか。ただし，仮数部を 24 ビットとし，指数部 2^L において，$-125 \leq L \leq 128$ とする。また，部分和は真の値 $\frac{\pi^2}{6}$ に十分近くなっているとしてよい。

(2) 倍精度で計算を行った場合，初めて情報落ちが生じるのは n がいくつのときか。ただし，仮数部を 53 ビットとし，指数部 2^L において，$-1021 \leq L \leq 1024$ とする。また，部分和は真の値 $\frac{\pi^2}{6}$ に十分近くなっているとしてよい。

問題 2

2 元連立非線形方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \tag{2}$$

をニュートン法で解くことを考える。

(1) 方程式 (2) を解析的に解け。

(2) 方程式 (2) に対する 2 変数ニュートン法の反復式を導け。
（解の近似値 $(x_n, y_n)^t$ が与えられたとき，次のステップの近似解 (x_{n+1}, y_{n+1}) を表す式を求めよ。）

(3) 初期値 $x_0 = 2, y_o = 0$ から始めてニュートン法を 5 ステップ実行せよ。

(4) 真の解（2 つのうち，ニュートン法の近似解が近づいていく方の解）を $(\bar{x}, \bar{y})^t$ とする。誤差のノルム $e_n = \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2}$ が n とともにどのように減少するか調べ，収束の次数を推定せよ。

問題 3

(1) $f(x) = \log(1 + x)$ を区間 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ で $n + 1$ 個の点 $x_i = -\frac{1}{2} + \frac{i}{n}$（$i = 0, 1, \ldots, n$）を使ってラグランジュ補間する。このとき，区間内における絶対誤差の上限を求めよ。

(2) 絶対誤差を 10^{-3} 以下にするには，n をどのように定めればよいか。