

2006 年度 応用数学 第 2 回レポート 課題

2007 年 1 月 15 日 (月) の授業終了時に提出してください。それ以前に提出する場合は, 工学部 3 号館南 305 号室までお願いします。

問題 1

積分 $I = \int_0^1 e^x dx$ を刻み幅 h の台形公式で計算した値 I_h と, 誤差 $e_h \equiv I_h - I$ を表 1 に示す。台形公式の誤差は $O(h^2)$ で減少するので, $I_h = I + ch^2 + O(h^3)$ と書ける。そこで, I_h と I_{2h} の線形結合 $I_h^{(1)} = aI_h + bI_{2h}$ を作れば, h^2 の項を消去でき, より速く I に収束する数列を作れるはずである。そのためには定数 a, b をどのように定めればよいか。また, $I_h^{(1)}$ の値を $h = 0.5$ から $h = 0.0625$ まで求め, 誤差も求めよ。

表 1: 台形公式による積分値 I_h と誤差 e_h

h	I_h	e_h
1.0	1.8591409	0.1408591
0.5	1.7539311	0.0356493
0.25	1.7272219	0.0089401
0.125	1.7205186	0.0022368
0.0625	1.7188411	0.0005593

問題 2

常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2, \quad y(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

について次の問に答えよ。

- (1) 方程式 (1) を解析的に解け。
- (2) 方程式 (1) を刻み幅 $h = 0.2$ のオイラー法で解け。また, 各点において解析解との誤差を求めよ。
- (3) 方程式 (1) を刻み幅 $h = 0.2$ のホイン法で解け。また, 各点において解析解との誤差を求め, 小問 (2) で求めた誤差と比較せよ。

問題 3

熱伝導方程式に対する陽的差分法において現れる $(M - 1) \times (M - 1)$ の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2r & r & & & \\ r & 1 - 2r & r & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & r & 1 - 2r & r \\ & & & & r & 1 - 2r \end{pmatrix} \quad (2)$$

の固有値, 固有ベクトルを次の手順で求めよ。

- (1) 固有値の 1 つを λ , 対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}$, 固有ベクトルの成分を v_j ($j = 1, 2, \dots, M - 1$) とするとき, v_{j-1}, v_j, v_{j+1} の満たす 3 項間の漸化式を求めよ。ただし, $v_0 = 0, v_M = 0$ と定義する。
- (2) $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ (ただし i は虚数単位) とおき, 境界条件 $v_0 = 0, v_M = 0$ より, $c_1 = c_2 = 0$ 以外の解が存在するための θ に関する条件を求めよ。また, v_j の式と求めた θ を小問 (2) の漸化式に代入することにより, 固有値 λ を ($M - 1$ 個) 求めよ。
- (3) 上記で求めた $M - 1$ 個の固有値に対する固有ベクトルをそれぞれ求めよ。