

2006 年度 応用数学 第 1 回レポート 解答

問題 1

- (1) 仮数部のビット数を t ビット (ケチ表現により 1 ビット得した分を含む) とし,

$$\begin{aligned}x &= 0.d_1d_2\dots d_t \times 2^l \\y &= 0.c_1c_2\dots c_t \times 2^m\end{aligned}\tag{1}$$

(ただし $d_1 = c_1 = 1$, d_i, c_i ($2 \leq i \leq t$) は 0 または 1, $l > m$) とする。このとき, $x + y$ の計算で乗法落ちが生じる条件は, $m \leq l - t - 1$ (講義ノート参照)。

いま, 部分和が $S_n \simeq \frac{\pi^2}{6} = 1.64493\dots = 0.82246\dots \times 2^1$ とする。これを 2 進浮動小数点数で表すと, $S_n = 0.11\dots \times 2^1$ 。これが x に相当するから, $l = 1$ で, 単精度では $t = 24$ だから, 情報落ちが生じる条件は $m \leq 1 - 24 - 1 = -24$ 。よって, 足される項 $\frac{1}{n^2}$ が 2^{-24} より小さいとき, 情報落ちが生じる。すなわち $n > 2^{12} = 4096$ 。したがって, 初めて情報落ちが生じるのは $n = 4097$ のときである。

- (2) 倍精度では $t = 53$ だから, 情報落ちが生じる条件は $\frac{1}{n^2} < 2^{-53}$, すなわち $n > 2^{26.5} = 94906265.62\dots$ 。したがって, 初めて情報落ちが生じるのは $n = 94906266$ のときである。

問題 2

- (1) 方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}\tag{2}$$

において, $y = 1 - x$ を第 1 式に代入すると,

$$x^2 + (1 - x)^2 = 1\tag{3}$$

これを解くと, $x = 0, 1$ 。これと $y = 1 - x$ より, 解は $(x, y) = (1, 0), (0, 1)$ となる。

- (2) $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $f_2(x, y) = x + y - 1$ とおくと, 方程式 2 は

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}\tag{4}$$

と書ける。2 変数ニュートン法の反復式は,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{x=x_n, y=y_n} \right)^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{bmatrix}\tag{5}$$

であるから (講義ノートの多変数ニュートン法の公式を参照), これに f_1, f_2 を代入すると,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_n & 2y_n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_n^2 + y_n^2 - 1 \\ x_n + y_n - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \frac{1}{2x_n - 2y_n} \begin{bmatrix} 1 & -2y_n \\ -1 & 2x_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_n^2 + y_n^2 - 1 \\ x_n + y_n - 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6}$$

となる。

n	x_n	y_n	e_n
0	2.000000	0.000000	1
1	1.250000	-0.250000	3.5×10^{-1}
2	1.041667	-0.041667	5.9×10^{-2}
3	1.001603	-0.001603	2.3×10^{-3}
4	1.000003	-0.000003	3.6×10^{-6}
5	1.000000	-0.000000	9.3×10^{-12}

- (3) 初期値 $x_0 = 2, y_0 = 0$ から始めてニュートン法を 5 ステップ実行すると、表のようになる。なお、表では数値解 (x_n, y_n) が真の解の 1 つ $(1, 0)$ に近づいていくことから、この解と数値解との誤差のノルム $e_n = \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2}$ も同時に載せた。
- (4) $e_{n+1} \simeq e_n^2$ が成り立つことから、2 次収束であると推定される。
(参考：2 次収束することは、理論的にも証明できる。)

問題 3

- (1) 区間 $[x_0, x_n]$ における n 次のラグランジュ補間の絶対誤差の最大値は、

$$e_n = \frac{1}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| |x_n - x_0|^{n+1} \quad (7)$$

である。いま、 $x_0 = 0, x_n = \frac{1}{2}$ 。また、 $f(x) = \log(1+x)$ であるから、

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)} \quad (8)$$

となり、 $|f^{(n+1)}(x)|$ は $x = 0$ のとき最大値 $n!$ をとる。これらより、

$$e_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (9)$$

となる。

- (2) $e_n < 10^{-3}$ となる最小の n を求めると、 $n = 7$ となる。