

2006 年度 応用数学 第 2 回レポート 解答

問題 1

$I_h = I + ch^2 + O(h^3)$, $I_{2h} = I + c(2h)^2 + O(h^3)$ と書けるから,

$$4I_h - I_{2h} = 3I + O(h^3) \quad (1)$$

これより,

$$I = \frac{4}{3}I_h - \frac{1}{3}I_{2h} + O(h^3) \quad (2)$$

よって, $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ とすればよい。

$I_h^{(1)}$ の値を $h = 0.5$ から $h = 0.0625$ まで求めると次のようになる。 $I_h^{(1)}$ は I_h に比べ, より速く真の積分値に近づくことがわかる。

表 1: 台形公式を加速して得た積分値 $I_h^{(1)}$ と誤差 e_h

h	$I_h^{(1)}$	e_h
0.5	1.7188612	5.79338×10^{-4}
0.25	1.7183188	3.70049×10^{-5}
0.125	1.7182842	2.33821×10^{-6}
0.0625	1.7182819	1.04874×10^{-7}

問題 2

(1) $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$ より,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 - y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y} \right) \quad (3)$$

よって,

$$x = \frac{1}{2} (-\log |1 - y| + \log |1 + y|) + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| + C \quad (4)$$

すなわち,

$$e^{2x+C} = \pm \frac{1 + y}{1 - y} \quad (5)$$

$\pm e^C = D$ とおいて y について解くと,

$$y = \frac{De^{2x} - 1}{De^{2x} + 1} \quad (6)$$

$y(0) = 0$ より $D = 1$ となるので,

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (7)$$

となる。

- (2) 刻み幅 h のオイラー法を与えられた方程式に適用したときの第 n ステップ目 ($x = nh$) での近似解を y_n とすると,

$$y_{n+1} = y_n + h(1 - y_n^2) \quad (8)$$

となる。 $y_0 = 0, h = 0.2$ とし, この漸化式に従って近似解 y_n とその誤差 $e_n \equiv |y_n - y(x_n)|$ を計算すると表 2 の結果が得られる。

- (3) ホイン法では, まず y_n からオイラー法による近似値 $\tilde{y}_{n+1}$ を求め, これを使って次のステップでの近似解 y_{n+1} を求める。各ステップでの計算式は次のようになる。

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h(1 - y_n^2), \quad (9)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \{ (1 - y_n^2) + (1 - \tilde{y}_{n+1}^2) \} \quad (10)$$

$y_0 = 0, h = 0.2$ とし, この漸化式に従って近似解 y_n とその誤差 $e_n \equiv |y_n - y(x_n)|$ を計算すると表 2 の結果が得られる。表より, ホイン法の方が誤差が小さいことがわかる。

表 2: オイラー法とホイン法による数値解とその誤差

n	x_n	真の解	オイラー法		ホイン法	
		$y(x_n)$	y_n	e_n	y_n	e_n
0	0	0	0	0	0	0
1	0.2	0.1973753	0.2000000	0.0026246	0.1960000	0.0013753
2	0.4	0.3799489	0.3920000	0.0120510	0.3770794	0.0028695
3	0.6	0.5370495	0.5612672	0.0242176	0.5327597	0.0042898
4	0.8	0.6640367	0.6982630	0.0342262	0.6586797	0.0053569
5	1	0.7615941	0.8007487	0.0391546	0.7557096	0.0058844
6	1.2	0.8336546	0.8725090	0.0388544	0.8277893	0.0058652
7	1.4	0.8853516	0.9202546	0.0349029	0.8799236	0.0054279
8	1.6	0.9216685	0.9508809	0.0292123	0.9169215	0.0047470
9	1.8	0.9468060	0.9700460	0.0232400	0.9428301	0.0039759
10	2	0.9640275	0.9818481	0.0178205	0.9608061	0.0032213

問題 3

- (1) 固有方程式 $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (ただし E は単位行列) の第 j 成分を書き下すと,

$$rv_{j-1} + (1 - 2r - \lambda)v_j + rv_{j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M-1) \quad (11)$$

となる。ここで, $v_0 = 0, v_M = 0$ という定義を用いた。式 (11) が求める 3 項漸化式である。

- (2) $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ を $v_0 = 0, v_M = 0$ に代入すると,

$$v_0 = c_1 + c_2 = 0 \quad (12)$$

$$v_M = c_1 e^{iM\theta} + c_2 e^{-iM\theta} = 0 \quad (13)$$

式 (12) より $c_2 = -c_1$ だから, これを式 (13) に代入すると,

$$c_1 e^{iM\theta} - c_1 e^{-iM\theta} = 2c_1 i \sin(M\theta) = 0 \quad (14)$$

これが $c_1 = c_2 = 0$ 以外の解を持つ条件は，

$$\theta = \frac{k}{M}\pi \quad (k = 1, 2, \dots, M-1) \quad (15)$$

ここで， θ と $\theta + \pi$ は， c_1 と c_2 の役割を交換すれば同じ解を与えるから， θ は $0 \leq \theta < \pi$ の範囲で考えてよいことを用いた。

一方， $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ を式 (11) に代入すると，

$$r \left(c_1 e^{i(j-1)\theta} + c_2 e^{-i(j-1)\theta} \right) + (1 - 2r - \lambda) (c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}) + r \left(c_1 e^{i(j+1)\theta} + c_2 e^{-i(j+1)\theta} \right) = 0 \quad (16)$$

整理すると，

$$(c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}) (2r \cos \theta + (1 - 2r - \lambda)) = 0 \quad (17)$$

これがすべての j ($1 \leq j \leq M-1$) について成り立たねばならないから，

$$2r \cos \theta + (1 - 2r - \lambda) = 0 \quad (18)$$

すなわち，

$$\lambda = 1 - 2r(1 - \cos \theta) = 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2M} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, M-1) \quad (19)$$

- (3) 固有値 $\lambda^{(k)} = 1 - 4r \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2M} \right)$ に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}^{(k)}$ とし，その第 j 成分を $v_j^{(k)}$ と書くと，
 $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ および式 (12)，式 (15) より，

$$v_j^{(k)} = c_1 (e^{ij\theta} - e^{-ij\theta}) = 2c_1 i \sin(j\theta) = 2c_1 i \sin \left(\frac{jk\pi}{M} \right) \quad (20)$$

固有ベクトルは定数倍してもよいから， $2c_1 i$ で割ると，

$$\mathbf{v}^{(k)} = \left[\sin \left(\frac{k\pi}{M} \right), \sin \left(\frac{2k\pi}{M} \right), \dots, \sin \left(\frac{(M-1)k\pi}{M} \right) \right]^t \quad (k = 1, 2, \dots, M-1) \quad (21)$$

となる。