

応用数理工学特論
「コンピューテーショナル・ファイナンスの
基礎」

山本有作¹

April. 15, 2004

¹名古屋大学 計算理工学専攻 杉原研究室

目次

第1章	デリバティブとは	7
1.1	市場変動によるリスク	7
1.2	デリバティブによるリスク回避	8
1.2.1	デリバティブの種類	8
1.2.2	オプションとは?	9
1.2.3	オプションから得られる利得	9
1.2.4	オプションの価格付け	10
1.3	様々なオプション	11
1.3.1	ヨーロピアンオプションとアメリカンオプション	11
1.3.2	経路依存型オプション	12
1.3.3	実際のオプション価格のデータ	15

目 次

1.1	プットオプションのペイオフ	10
1.2	コールオプションのペイオフ	11
1.3	アメリカンオプション	12
1.4	バリアオプション	13
1.5	ルックバックコールオプション	13
1.6	アジアンオプション	14

第1章 デリバティブとは

本章では、本講義の主題となるデリバティブ、特にその一種であるオプションについて説明する。そのため、まず株式、為替などの市場変動により企業や投資家がどのようなリスクを被るかを示し、そのリスクを回避するための金融商品としてオプションを導入する。次に、オプションの価格付けと呼ばれる問題を紹介し、簡単なモデルを使って価格付けの原理を学ぶ。

1.1 市場変動によるリスク

企業の経済活動と金融市場 企業が経済活動を行うに当たっては、株式、為替、金利などの金融市場が大きな役割を果たす。たとえば製造業の会社は設備投資を行うため、株式を発行したり銀行から借入れを行ったりして資金を調達する。また、原材料を外国から輸入する場合は為替市場により円と他国通貨との両替を行う。一方、保険会社や投資信託会社は顧客から預かったお金を株式、国債などに投資し、資産運用を行う。

しかし、これら株式、為替レート、金利などの市場は一般に時間とともに大きく変動し、それによるリスクが生じる。このリスクを回避するための商品が**デリバティブ（金融派生証券）**である。

実際の市場変動のデータ デリバティブについて説明する前に、まず実際の市場変動のデータを見てみよう。ここでは、株価のデータ2つと為替のデータ1つを示す（実際のグラフについては第1回授業のパワーポイントを参照）。

- 株価の例1： IBM, 2002年4月～2004年4月のデータ。
- 株価の例2： トヨタ, 2002年4月～2004年4月のデータ。
- 為替の例： ドル／円の為替レート。2003年4月～2004年4月のデータ。

なお、これらのデータは以下のサイトから無料で入手できる。

- Financial Times： <http://news.ft.com/markets/equities>
- Yahoo! Finance： <http://finance.yahoo.com>

- 朝日新聞（経済 為替欄）：<http://www.asahi.com/business/exchange.html>

これらのグラフはそれぞれ全く違った動きをしているが、データとしては似た性質を持っている。たとえば、極めて不規則な細かい動きをすること、時には急激な値下がり、値上がりがあること、過去の動きから将来の動きを予測することが非常に難しそうであること、などである。

市場変動によるリスク このような市場変動により生じるリスクの例を2つ挙げてみよう。

- (1) トヨタの株を1株\$73で購入した。1年後には株価がさらに上がると見込んでおり、その時点で売却して利益を得るつもりである。しかし、万一その時点で株価が暴落していたら、大損してしまう。
- (2) ある製造業の会社では、3ヵ月後に原材料をアメリカから輸入して製品を作る計画を立てている。購入代金はその時点までに用意するつもりであり、予算は\$1=106円として組んでいる。しかし、万一3ヵ月後の時点で円が大きく下がっていると、赤字になってしまう。

デリバティブを使うと、このようなリスクを回避することができる。

1.2 デリバティブによるリスク回避

1.2.1 デリバティブの種類

デリバティブには様々な種類があるが、ここではそのうちの主な4つを紹介する。

デリバティブ の種類	{	オプション …将来のある時点で、資産を予め決められた価格で売買する <u>権利</u> 。 ⇒行使するかは自由。《契約より有利》
		先物 (future) …将来のある時点で、資産を予め決められた価格で売買する <u>契約</u> 。
		先渡し (forward) …先物取引と対象は同じ。 ただし、相対（あいたい）取引であり、取引上の制約は緩やか。
		スワップ …同一通貨の金利を交換、異種の通貨を金利ごと交換する。

この講義では、これらのデリバティブのうち、主に『**オプション**』を対象にする。

1.2.2 オプションとは？

オプションには、『売却する権利』と『購入する権利』の2種類があり、それぞれ**プットオプション**、**コールオプション**と呼ばれる。オプションを利用すると、前節で述べたような市場変動によるリスクをたとえば次のようにして回避できる。

- (1) トヨタの株に加えて、1年後にその株を\$70で売る権利（プットオプション）を持っていたとする。すると、万一1年後に株が暴落した場合でも権利を行使することにより株を\$70で売ることができ、損失は最小限に抑えられる。もし予想通り株価が上がっていたら、権利は行使せずに市場で株を売却すればよい。
- (2) 3ヵ月後に1ドルを106円で買う権利（コールオプション）を持っていたとすると、3ヵ月後にドルが高騰した場合でも予定の予算でドルを買うことができ、赤字を出さずにすむ。もし1ドルが106円よりも安ければ、権利を放棄して市場で購入すればよい。

オプションを定義するパラメータとしては、対象となる資産（株式、為替など）、現在の資産価格、**行使価格**（売買する価格）、**満期**（資産の売買が行われる日時）、オプションの種別（コールとプット）などがある。上の例でのパラメータは次のようになる。

対象となる資産	トヨタの株	ドル
現在の資産価格 S_0	\$73	106 円
行使価格 K	\$70	106 円
満期 T	1 年後	3 ヶ月後
オプションの種別	プットオプション	コールオプション

1.2.3 オプションから得られる利得

いま、時刻 t における資産価格を S_t と書くことにする。すると、オプションを持つことにより得られる満期での利得（**ペイオフ**と呼ぶ）は次のようになる。

プットオプションの場合

$$\begin{cases} S_T \geq K & \Rightarrow & \text{市場で売却したほうが利益が大きい。} & \Rightarrow & \text{利益 } 0 \\ S_T < K & \Rightarrow & \text{権利を行使、相手に\$70で売る。} & \Rightarrow & \text{利益 } K - S_T \end{cases}$$

なお、 $S_T \geq K$ の場合でも $S_0 < S_T$ ならば株の値上がりにより $S_T - S_0$ だけの利益があるように思うかもしれないが、これはたとえプットオプションを持っていなかったとしても得られる利益なので、オプションを持つことによる追加の利益は0である。 $S_T < K$ の場合の利得も同様に考える。

以上の2つの場合をまとめると、プットオプションのペイオフは

$$\max(K - S_T, 0) \quad (1.1)$$

と書ける。 S_T の関数として見たペイオフのグラフを図 1.1 に示す。

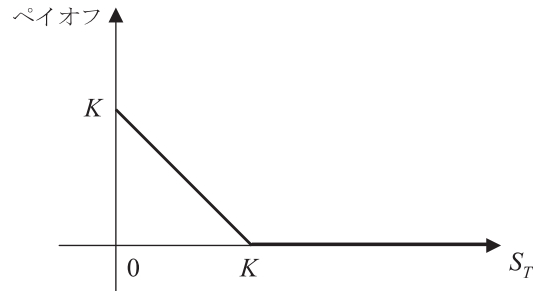


図 1.1: プットオプションのペイオフ

コールオプションの場合 プットオプションの場合と同様に考えると、満期時点でオプションから得られる利得は次のようになる。

$$\begin{cases} S_T > K \implies \text{権利を行使, 相手から 100 円で買う。} \implies \text{利益 } S_T - K \\ S_T \leq K \implies \text{市場で購入したほうが利益が大きい。} \implies \text{利益 } 0 \end{cases}$$

これらをまとめて、コールオプションのペイオフは次式のようなになる。

$$\max(S_T - K, 0) \quad (1.2)$$

コールオプションのペイオフのグラフを図 1.2 に示す。

1.2.4 オプションの価格付け

式 (1.1), (1.2) より、プットの場合でもコールの場合でも、オプションの権利の持ち手は満期において必ず 0 以上の利益を得ることがわかる。この利益はそのまま相手側の損失となるので、相手側は必ず 0 以上の損失を被ることになり、このままでは誰もオプション契約の相手方となる人はいない。つまり、オプションの権利を手に入れるにはそれなりの代価、対価を支払う必要がある。

そこで、権利の買い手は権利の売り手に時刻 $t = 0$ で代価を支払い、売り手側はこの代価が後で被るリスクに対して妥当であると判断すれば、権利を

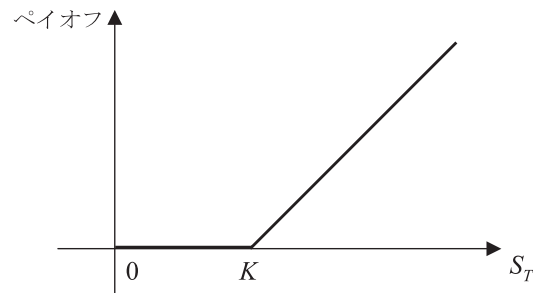


図 1.2: コールオプションのペイオフ

売る。

⇒ この代価を オプションの価格 と呼ぶ。

この『オプションの価格をどう定めれば経済学的に合理的か』（両者が納得するか）ということが重要になる。

⇒ これを オプションの価格付け問題 という。

オプションの価格付け問題が本講義の主要なテーマである。

1.3 様々なオプション

1.3.1 ヨーロピアンオプションとアメリカンオプション

ヨーロピアンオプション 前節で述べたオプションは、満期 T でのみ権利行使が可能であった。このようなオプションを**ヨーロピアンオプション**と呼ぶ。ヨーロピアンオプションについては、**ブラック＝ショールズ公式**と呼ばれる解析的な式により価格を計算することが可能である。これについては第5章で扱う。

アメリカンオプション 一方、 $0 \leq t \leq T$ の任意の時点で権利行使可能なオプションもあり、**アメリカンオプション**と呼ばれる。いま、ある株式に対する行使価格 K のプットオプションを持っている人がいて、時刻 t ($0 < t < T$) における株価が K を下回っていると仮定しよう。更に、株価はこれから上昇し、満期 T では K を大きく超えるだろうと予測したとする（図 1.3 参照）。この場合、持っているオプションがヨーロピアンオプションであれば、満期 T ではオプションが無価値になる（市場で売ったほうが高いから）と予測しつつも、何もすることができない。一方、アメリカンオプションであれば、時刻 t で権利行使をすることにより、その時点で $K - S_t$ の利得を得ることができる。

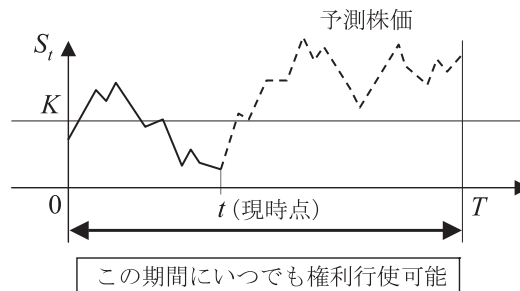


図 1.3: アメリカンオプション

アメリカンオプションではこのような行使時期の自由度があり、その分利得を得られる可能性も高くなるので、オプション価格はヨーロピアンオプションに比べて当然高くなる。また、自由度が高い分だけ価格計算も複雑となり、解析的な式で価格を計算することは一般にできない。そのため、数値計算が重要になる。これについては第7章、第8章で扱う。

1.3.2 経路依存型オプション

前節で述べたオプションでは、オプションのペイオフは満期 T における資産価格 S_T にのみ依存し、途中の資産価格 S_t ($0 < t < T$) には依存しなかった。しかし、市場で取引されるオプションの中には、ペイオフが途中の資産価格に依存して決まるオプションもある。これらを経路依存型オプションと呼ぶ。よく知られた経路依存型オプションとしては、バリアオプション、ルックバックオプション、アジアンオプションなどが挙げられる。

バリアオプション 通常のヨーロピアンオプションとほとんど同じだが、資産価格に**バリア**と呼ばれるあるレベル H が設定され、 $0 \leq t \leq T$ のどこかの時点で S_t が H を越えた場合に契約が無効になるオプションを**バリアオプション**と呼ぶ(図 1.4 参照)¹。

オプションの売り手側からすると、コールオプションを売ることによる損失は理論上はいくらでも大きくなりうる(株価は理論上はいくらでも上がりうる)が、バリアを設けることで、株価がバリアを越えた場合に契約を無効にすることができ、損失に上限を設けられるというメリットがある。そのため、バリアオプションの価格はバリアのないヨーロピアンオプションに比べて安くなる。

バリアオプションの価格を計算する式は、解析的に求められている²。しか

¹正確には、 S_t が H を下回った場合に契約が無効になるもの、 H を越えた場合に初めて契約の効力が発生するものなど、様々な変種がある。

²資産価格がブラック=ショールズモデルに従う場合。

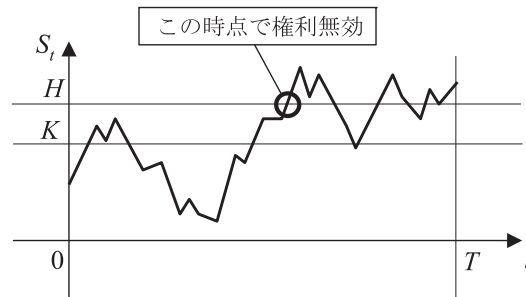


図 1.4: バリアオプション

し、バリア越えの観測を連続時間 ($0 \leq t \leq T$) でなく離散時点（たとえば週に1回）のみで行うなど、問題の設定を少し変えると解析解が使えなくなり、数値計算が必要となる。

ルックバックオプション 満期において、 $0 \leq t \leq T$ における資産価格の最安値で資産を購入できる権利を**ルックバックコールオプション**と呼ぶ（図 1.5 参照）³。このオプションの満期におけるペイオフは、行使価格が $\max_{0 \leq t \leq T} S_t$ であるとみなせることより、

$$S_T - \max_{0 \leq t \leq T} S_t \quad (1.3)$$

と書ける。一方、 $0 \leq t \leq T$ における資産価格の最高値で資産を売却できる権利を**ルックバックプットオプション**と呼ぶ。

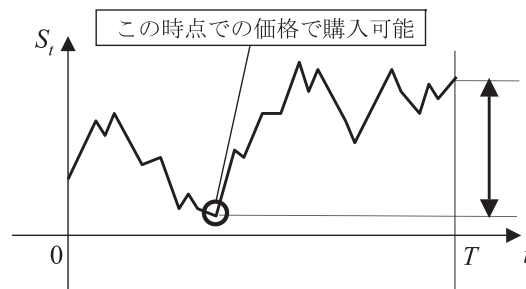


図 1.5: ルックバックコールオプション

ルックバックオプションを持つと、資産売買のタイミングについて悩むことなく、もっとも有利な条件で資産を売買できるというメリットがある。もちろん、オプションの価格はそれに応じて高価になる。

³正確には floating strike lookback option と呼ぶ。この他に、fixed strike lookback option というものもある。

ルックバックオプションの価格を計算する式は、解析的に求められている⁴。しかし、最安値／最高値の観測を連続時間 ($0 \leq t \leq T$) でなく離散時点（たとえば週に1回）のみで行うなど、問題の設定を少し変えると解析解が使えなくなり、数値計算が必要となる。

アジアンオプション 満期において、 $0 \leq t \leq T$ における資産価格の平均値で資産を売買できる権利を**アジアンオプション**と呼ぶ（図 1.6 参照）⁵。このオプションの満期におけるペイオフは、アジアンコールオプションの場合、

$$\max \left(S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt, 0 \right) \quad (1.4)$$

と書ける。

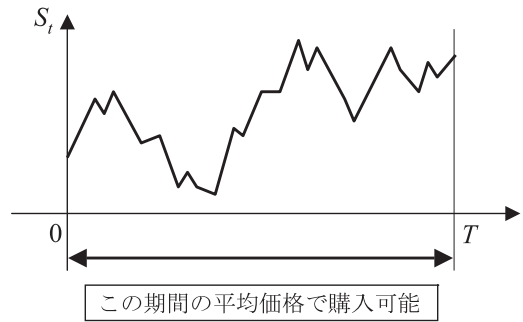


図 1.6: アジアンオプション

アジアンオプションを持つと、資産を売買するタイミングに影響されずに、安定した価格で売買を行えるというメリットがある。

アジアンオプションの価格を計算する解析的な式は求められていない。したがって、価格を求めるには数値計算が必要である。

経路依存型オプションとアメリカンオプションとの組み合わせ 以上で説明した3種類の経路依存型オプションは、いずれも満期時点でのみ権利行使が可能という意味でヨーロピアンタイプである。これに対して、満期までの任意の時点で権利行使が可能なアメリカンタイプの経路依存型オプションも存在する。たとえば、通常のアเมริカンオプションに、資産価格がバリアを越えると権利が無効になるという特徴を持たせた**アメリカン・バリアオプション**、満期までの任意の時点で権利行使ができ、その時点までの最安値（最高値）で資産が購入（売却）できる**アメリカン・ルックバックオプション**などが存在する。

⁴資産価格がブラック＝ショールズモデルに従う場合。

⁵正確には floating strike Asian option または average strike option と呼ぶ。この他に、fixed strike Asian option というものもある。

1.3.3 実際のオプション価格のデータ

Chicago Board Options Exchange (CBOE) と呼ばれる米国のオプション市場で取引されている IBM 株に対するオプションの価格を見してみる（実際のデータはパワーポイント参照）。ここで示したオプションのパラメータは次の通りである。

- 現時点での株価 S_0 : \$93.04
- 行使価格 K : \$45 から \$100 まで \$5 刻み
- 満期 T : 2004 年 4 月
- オプションの種別 : コール（左側の欄）およびプット（右側の欄）

オプション価格を見ると、コールは行使価格が安いほど高く、プットは行使価格が高いほど高いことがわかる。また、コールにおいては行使価格とオプション価格との和（すなわちコールオプションを用いて 1 株を手に入れるのに必要な資金の合計）が現時点での株価に近い値になっている（行使価格が現時点での株価より低い場合）ことがわかる。これは、満期までの時間が非常に短く、その間に株価の大きな変化はないであろうと多くの人々が予想していることの反映だと考えられる。

なお、オプション価格のデータは以下のサイトから無料で入手できる。

- CBOE : <http://quote.cboe.com/QuoteTable.asp>
- London International Futures and Options Exchange (LIFFE)
<http://www.liffe-data.com/>