1.4　簡単なモデルによるオプション価格計算

1.4.1　1 期間 2 項モデル

オプションの価格付けがどのような原理で行われるかをまず知るため，次のような簡単なモデルを考える。

- 時刻は現時点 $t = 0$ と満期 $t = T$ の 2 つだけを考える。
- 満期 $t = T$ において株価が取りうる値は 2 通りのみとする。

これを *1* **期間** *2* **項モデル**と呼ぶ。

$t = 0$ での株価を S とし，満期においては株価が確率 q で $u\,(>1)$ 倍に，確率 $1-q$ で $d\,(0<d<1)$ 倍になると仮定すると，株価の動きは図 1.7 のように表せる。

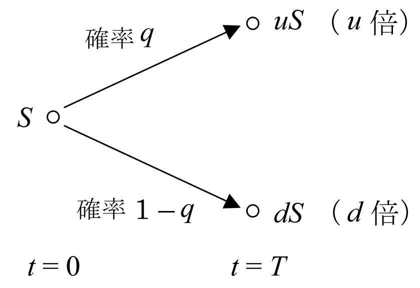

図 1.7: 1 期間 2 項モデル（株価）

オプションの価格付けを行うにあたっては，実は株式に加え，**安全資産**と呼ばれる別の種類の資産が市場に存在すると仮定する必要がある。安全資産とは，時刻 $t = 0$ で価格が 1 であり，時刻 $t = T$ では価格が確実に $1+R\ (R>0)$ となるような資産である。安全資産の具体例としては銀行預金，国債などがある。いずれの場合でも，R は満期までの間の利息である。安全資産の価格の動きを株価の動きと同様に表すと，図 1.8 のようになる。

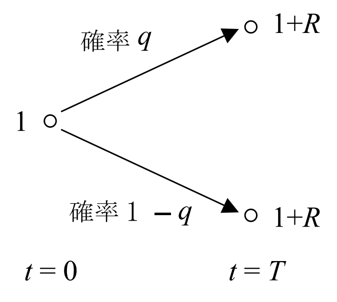

図 1.8: 1 期間 2 項モデル（安全資産）

最後にオプションの価格の動きを考える。まず，時刻 $t=0$ におけるオプション価格を C とする。満期時刻 $t=T$ においては，オプションの価値（すなわちペイオフ）は 1.2.3 節で述べたように株価に依存するので，2 通りの値を取り得る。株価が上がったときのペイオフを C_u，下がったときのペイオフを C_d とする。たとえばコールオプションの場合は

$$C_u = \max(uS-K,0) \tag{1.5}$$
$$C_d = \max(dS-K,0) \tag{1.6}$$

である。オプション価格の動きを図 1.9 に示す。

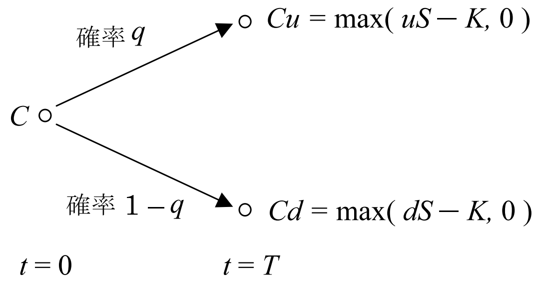

図 1.9: 1 期間 2 項モデル（オプション）

1.4.2　オプション価格計算の原理

無裁定条件　上記のモデルの下でオプション価格 C を計算するため，次の条件を仮定する。

- 現在の投資額がゼロ以下で，将来確実にプラスの利益を得る機会は存在しない。
- 現在の投資額がマイナスで，将来確実にゼロ以上の利益を得る機会は存在しない[6]。

これらを**無裁定条件**と呼ぶ。無裁定条件より，次のことが導かれる。

２つの資産の価格が $t=T$ で等しいならば $t=0$ でも等しい。

これを示すため，２つの資産を A，B，それぞれの $t=T$ での価格を S_T^A，S_T^B，$t=0$ での価格 S_0^A，S_0^B として $S_T^A=S_T^B$ でかつ $S_0^A>S_0^B$ だと仮定しよう。すると，時刻 0 で資産 A を 1 単位**空売り**（自分の持っていない資産を売ったことにして相手から代金を受け取り，満期においてその資産を市場で

[6]今野浩「金融工学の挑戦」，中公新書，2000. 参照。

購入して相手に渡すこと）して代金 S_0^A を手に入れ，そのうち S_0^B を使って資産 B を 1 単位購入し，残りの $S_0^A - S_0^B$ (> 0) を銀行預金に回すことができる。時刻 T では資産 B を売却して代金 S_T^B $(= S_T^A)$ を受け取り，そのお金で資産 A を 1 単位購入して空売りの相手に渡す。こうすると，$t = 0$ での投資額が 0 なのに，$t = T$ では預金した $S_0^A - S_0^B$ の分だけ利益を得ることができる。これは無裁定条件に反する。したがって，$S_T^A = S_T^B$ ならば $S_0^A > S_0^B$ でなくてはならない。

複製ポートフォリオ　無裁定条件を使ってオプション価格を計算するため，株式と安全資産を組み合わせ，$t = T$ でオプションと同じペイオフが得られるようにする。この組み合わせを**複製ポートフォリオ**と呼ぶ[7]。複製ポートフォリオは $t = T$ でオプションと同じ価値を持つから，$t = 0$ でもオプションと同じ価値を持つ。したがって，$t = 0$ での複製ポートフォリオの価値がオプション価格 C となる。

複製ポートフォリオが株式 x 単位，安全資産 y 単位からなるとすると，$t = T$ でこれがオプションと同じ価値を持つための条件は次のようになる。

$$t = T\text{（上昇）} \quad : \quad uSx + (1+R)y = C_u, \tag{1.7}$$

$$t = T\text{（下降）} \quad : \quad dSx + (1+R)y = C_d. \tag{1.8}$$

一方，$t = 0$ で両者の価値が等しいという条件は次のようになる。

$$t = 0 \quad : \quad Sx + 1y = C, \tag{1.9}$$

式 (1.7)，(1.8) より，

$$x = \frac{1}{S}\frac{C_u - C_d}{u - d}$$

$$y = -\frac{1}{1+R}\frac{dC_u - uC_d}{u - d}.$$

これを式 (1.9) へ代入すると，

$$\begin{aligned} C &= xS + y \\ &= \frac{C_u - C_d}{u - d} - \frac{1}{1+R}\frac{dC_u - uC_d}{u - d} \\ &= \frac{1 + R - d}{u - d}\frac{C_u}{1+R} + \frac{u - (1+R)}{u - d}\frac{C_d}{1+R}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

となる。こうして，$t = 0$ におけるオプション価格 C が求められた。

[7] ポートフォリオ（Portfolio）とは，もともと，「紙バサミ，書類入れ」という意味の言葉である。個々の機関や個人が保有する証券はそれぞれ，「紙バサミ，書類入れ」で保管されていたことが多かったため，保有者ごとに保管した複数の証券を一つの資産として見なし，それをポートフォリオと呼ぶようになった。そして，現在では証券，不動産等も含めた金融資産を組み合わせてできた資産全体をポートフォリオと呼ぶようになっている。

1.4.3　リスク中立確率

1 期間 2 項モデルにおいては，無裁定条件が満たされている限り，株価の上昇率 u，下降率 d，安全資産の利益率 $1+R$ の間に

$$d < 1 + R < u \tag{1.11}$$

が成り立つ。なぜなら，もし $d > 1 + R$ だとすると，株価は下がった場合でも安全資産より高い利益を生むことになるため，$t = 0$ において安全資産を S 単位空売りして（すなわち銀行から S ドル借りて）その代金で株式を購入し，$t = T$ で株を売却して銀行に $(1+R)S$ ドルを返済すれば，初期投資ゼロで満期において正の利益が得られることになるからである。同様に，$u < 1 + R$ と仮定しても，株式を空売りしてその代金を安全資産に投資する（すなわち銀行に預金する）ことにより，無裁定条件と反する結果が得られる。

このことより，式 (1.10) において

$$P_u = \frac{1+R-d}{u-d}, \quad P_d = \frac{u-(1+R)}{u-d} \tag{1.12}$$

とおくと，$0 < P_u < 1$，$0 < P_d < 1$ が成り立つ。更に，明らかに $P_u + P_d = 1$ が成り立つ。そこで，P_u，P_d を確率とみなして**リスク中立確率**と呼ぶ。

この確率の下での期待値を $E[\cdot]$ で表すと，式 (1.10) のオプション価格は

$$\begin{aligned} C &= P_u \frac{C_u}{1+R} + P_d \frac{C_u}{1+R} \\ &= E\left[\frac{C_T}{1+R}\right] \end{aligned} \tag{1.13}$$

と書ける。ここで，C_T 満期におけるオプションのペイオフであり，株価の上昇・下降に応じて C_u または C_d のどちらかの値を取る。また，期待値の中の $1/(1+R)$ という因子は，安全資産の時刻 T での価格と時刻 0 での価格の比であるから，資産の時刻 T での価値を時刻 0 での価値に換算する因子（**割引率**と呼ぶ）と考えることができる。そこで，式 (1.13) を言葉で表現すると次のようになる。

時刻 $t = 0$ におけるオプション価格は，満期におけるオプションペイオフに割引率を掛け，リスク中立確率の下での期待値を取ることによって求められる。

ここでは 1 期間 2 項モデルについてこの関係式を導いたが，実はこの計算法は後に述べるブラック＝ショールズモデル，多期間２項モデルなど，より広い範囲のモデルに対して適用可能である。これについては，２項モデルによる価格計算法，モンテカルロ法による価格計算法を扱う章で述べる。

第2章　確率論の基礎

本章ではいったんファイナンスの話題から離れ，次章以下で使う確率論の基礎を学ぶ。まず1変数の確率分布についての話から始め，多変数の確率分布，条件付き確率，確率変数の和の分布，確率過程とその性質，そしてブラウン運動について学んでいく。

2.1　1変数の場合

確率変数　サイコロを振って出た目の数 X，明日の気温 T，明日の円／ドルの為替レート S などは，事前に確定的に予測することができず，いくつかの（あるいは無限個の）値のどれかを確率的に取ると考えられる。この X，T，S のような変数を**確率変数**と呼ぶ。X の取り得る値は1から6までの整数という離散的な値であり，このような確率変数を**離散的な確率変数**と呼ぶ。一方，T はある範囲内で任意の実数値を取り得る。このような確率変数を**連続的な確率変数**と呼ぶ。S の場合は，ある精度（たとえば0.01円）以下は丸められるので厳密には離散的な確率変数であるが，取り得る値が密に分布しているため，連続的な確率変数として扱うほうが便利なことが多い。本講義でも，株価や為替レートなどは連続的な確率変数として扱う。

事象　確率変数に対しては，その取り得る値の集合があらかじめ決まっているが，その中で，値がある部分集合に属するか否かを問題にすることが多い。この部分集合を**事象**と呼ぶ[1]。以下は事象の例である。

- サイコロを振って6の目が出る。
- サイコロを振って2か3の目が出る。
- コインを n 回投げて，そのうち x 回表が出る。
- 明日の気温 T が25℃から30℃の間にある。
- 明日のドル／円の為替レート S が，109円から110円の間にある。

[1] 事象の厳密な定義については，たとえばトーマス・ミコシュ（遠藤靖訳）「ファイナンスのための確率微分方程式」，東京電機大学出版局，2000. を参照。

事象に対する確率　各事象に対して，その**確率**を定義することができ，$P(\cdot)$ のように書く。たとえば上記の各事象に対しては，次のように確率を定義できる。

- サイコロの例 1： $P(X=6)=\dfrac{1}{6}$
- サイコロの例 2： $P(X=2 \text{ または } X=3)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$
- 表の出る回数を X おつると，コインを n 回投げたときの表と裏の組み合わせは全部で 2^n 通りあり，そのうち表が x 回出る組み合わせは ${}_nC_x$ 通りであるから，$P(X=x)=\dfrac{{}_nC_x}{2^n}$。
- 気温の例： $P(25 \leqq T \leqq 30)=0.5$
- 為替の例： $P(109 \leqq S \leqq 110)=0.3$