次に X と Y が連続分布で，それぞれの確率密度関数が $f_X(x)$，$f_Y(y)$ であるとき，$Z = X + Y$ の確率密度関数 $f_Z(z)$ を求めることを考える。まず，確率密度関数の定義より，$f_Z(z)$ は

$$f_Z(z)dz = P(z \le Z \le z + dz) \tag{2.21}$$

を満たす関数である。そこで $z \le Z \le z + dz$ を満たす (x, y) の集合を図に表すと，これは図 2.7 の b の領域になる。領域 b 中の微小領域 a を考えると，(x, y) がこの領域に入る確率は，X と Y とが独立であることから

$$f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy = f_X(x)\, f_Y(z - x)\, dx\, dz \tag{2.22}$$

となる。したがって領域 a に入る確率は，これを x について積分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z - x)\, dx \times dz \tag{2.23}$$

となる。定義よりこれが $f_Z(z)dz$ であるから，

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z - x)\, dx \tag{2.24}$$

が成り立つ。

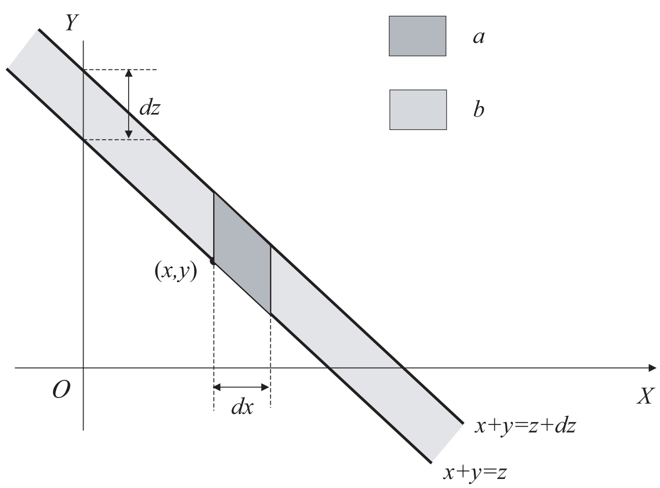

図 2.7: $z \le Z \le z + dz$ を満たす (x, y) の集合

例 1： X, Y が独立な $[0, 1]$ の一様分布に従う場合　X と Y が独立でそれぞれ一様分布

$$f_X(x) \begin{cases} 1 & (a \ge x \ge b) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{2.25}$$

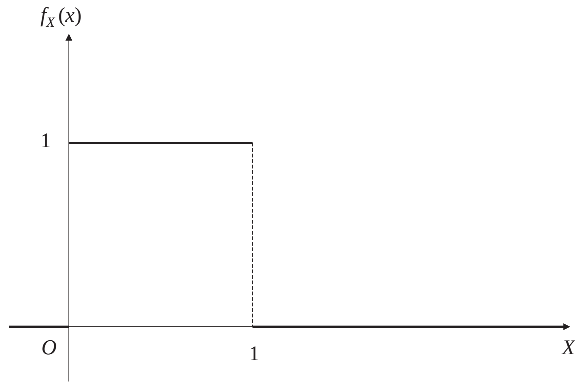

図 2.8: 一様分布の確率密度関数

（$f_Y(y)$ も同様）に従う場合に，$Z = X + Y$ の確率密度関数 $f_Z(z)$ を求める。
　このとき，式 (2.24) において被積分関数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ は不連続なので，次の 4 つの場合に分けて考える。

(1) $z < 0$ のとき
被積分関数において $f_X(x) \neq 0$ となるには $x \geq 0$ の必要があるが，このとき $z - x < 0$ なので $f_Y(z - x) = 0$ である。したがって常に

$$f_Z(z) = 0 \tag{2.26}$$

である。

(2) $0 \leq z \leq 1$ のとき
$f_X(x) \neq 0$ となる条件は $0 \leq x \leq 1$ で，$f_Y(y) \neq 0$ となる条件は $0 \leq z - x \leq 1$ すなわち $z - 1 \leq x \leq z$ である。これらの共通部分は $0 \leq x \leq z$ であるから，

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx \\ &= \int_0^z dx = z \end{aligned} \tag{2.27}$$

(3) $1 < z \leq 2$ のとき (2) と同様，被積分関数が 0 でないのは $0 \leq x \leq 1$ かつ $z - 1 \leq x \leq z$ のときであるが，$1 < z \leq 2$ に注意するとこれらの共通部分は $z - 1 \leq x \leq 1$ であることがわかる。したがって，

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{z-1}^1 f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx \\ &= \int_{z-1}^1 dx = 2 - z \end{aligned} \tag{2.28}$$

(4) $z > 2$ のときこの場合，$0 \leq x \leq 1$ かつ $0 \leq z - x \leq 1$ を同時に満たす x は存在しないから，

$$f_Z(z) = 0 \tag{2.29}$$

である。

以上により得られる $f_Z(z)$ を図 2.9 に示す。

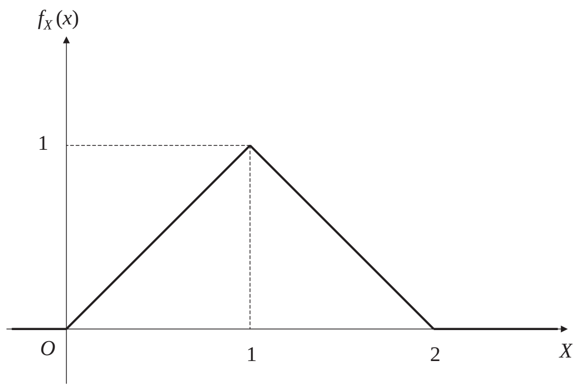

図 2.9: ２つの一様分布の和の確率密度関数

例 2： X, Y が独立な正規分布に従う場合　X と Y が独立でそれぞれ正規分布

$$X \sim N(0, \sigma_1^2) \tag{2.30}$$
$$Y \sim N(0, \sigma_2^2) \tag{2.31}$$

に従う場合に，$Z = X + Y$ の確率密度関数を求める。

公式 (2.24) にしたがって計算すると[5],

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_2 e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\left(\frac{1}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2\sigma_2^2} \right) x^2 + \frac{2zx}{2\sigma_2^2} + \frac{z^2}{2\sigma_2^2} \right\} dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2} x^2 - 2zx + z^2}{2\sigma_2^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1} x - \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} z \right)^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} z^2}{2\sigma_2^2} \right\} dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\left(\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1} x - \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} z \right)^2}{2\sigma_2^2} \right\} \\
&\qquad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \right) dx
\end{aligned}
$$

$$
\left(\text{ここで} \quad x' = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1} x - \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} z \text{ とおくと,} \right.
$$

$$
\left. dx' = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1} dx \text{ となるので} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma_2^2} \right) dx' \\
&\qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma_2^2} \right) dx' = \sqrt{2\pi}\sigma_2 \text{ より} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \right) \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
Z \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \qquad (2.33)
$$

となる。

一般に, $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ のとき $X - \mu \sim N(0, \sigma_1^2)$ であることに注意すると,上記の結果から,

$$
\begin{aligned}
X &\sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad (2.34) \\
Y &\sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

[5] 実はこの計算は,特性関数と呼ばれる概念を利用すると,もっと簡単に行うことができる。特性関数については,ほとんどの確率論の教科書に載っている。

のとき

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \tag{2.36}$$

となることがわかる。このように，任意の正規分布に従う2つの独立な変数の和が再び正規分布に従うということは，正規分布の非常に特徴的な性質である。

2.3　確率過程

2.3.1　確率過程の定義

離散時間の確率過程　離散的な値をとる添字 i を持つ確率変数の集合 $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ を離散時間の**確率過程**と呼ぶ。例としては次のものが挙げられる。

- 毎日1回ずつ計った気温
- 毎日1回ずつ観測した株価
- ランダムウォーク： 硬貨を投げて表が出たら右へ1進み，裏が出たら左へ1進む。たとえば表，表，裏，表，表，… と出た場合，$\{X_i\} = \{1, 2, 1, 2, 3, \dots\}$ となる。

連続時間の確率過程　連続値をとる添字 t を持つ確率変数 X_t の集合 $\{X_t | t \in T\}$ を連続時間の確率過程と呼ぶ。添字の範囲 T としては，たとえば $[0, 1]$，$[0, +\infty)$ などが考えられる。例としては次のものが挙げられる。

- 連続的に観測した株価[6]
- 連続的に観測した気温
- ランダムな力を受ける粒子の運動（花粉を水に浮かべたときに観察されるブラウン運動[7]など）

有限次元分布　連続時間の確率過程 $\{X_t\}$ の実現値を1つ考えるということは，関数 X_t（$t \in T$）を1つ定めるということである。したがって，X_t の実現確率を考えるということは，関数空間に対して確率を定義することになり，数学的に高度な議論が必要になる。そこで代わりに，$\{X_t\}$ から n 個の時点 $t_1, t_2, \dots, t_n$ を取り出したときの $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ の確率密度関数

[6]実際には観測は離散時点で行うことになるが，観測の時間間隔が十分細かい場合は，連続時間と考えたほうが数学的に扱いやすいのでそのように見なす。

[7]ここで言っているのは物理現象としてのブラウン運動である。数学的な意味でのブラウン運動は後ほど定義する。

$f(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ を考える。これを $\{X_t\}$ の**有限次元分布**と呼ぶ。有限次元分布は前節で扱った多変数の確率密度関数であるから，扱いが容易である。更に，任意の n，任意の $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ に対して有限次元分布が与えられると，$\{X_t\}$ の分布も定まることが知られている（コルモゴロフの拡張定理）。そこで以下では，$\{X_t\}$ の分布を考える場合は有限次元分布のみを考えることにする。

2.3.2　確率過程の性質

マルコフ過程　次に，確率過程に対して，後の章で使う基本的な性質をいくつか定義する。まず，離散時間の確率過程 $\{X_i\}$ を考える。$X_i = x$ であるとき，X_j（$j > i$）の分布が i より前の履歴 $\{\ldots, X_{i-3}, X_{i-2}, X_{i-1}\}$ によらずに x のみによって定まるならば，$\{X_i\}$ を**マルコフ過程**という。本節の最初で述べた離散時間の確率過程の例がマルコフ過程になっているかどうか考えてみよう。

- ランダムウォーク：　たとえば硬貨を 4 回投げて，$X_4 = 2$ となったとする（図 2.10）。このとき $X_5 = 1$ または $X_5 = 3$ で，その確率は共に $\frac{1}{2}$ である。この確率は，それまでどのような経路を通って $X_4 = 2$ となったかには依存しない。実際，図の実線の経路を通ってきた場合もありうるし，点線の経路を通ってきた場合もありうるが，$P(X_5 = 1) = P(X_5 = 3) = \frac{1}{2}$ という確率は，$X_4 = 2$ という事実のみによって定まる。したがって，硬貨投げのランダムウォークはマルコフ過程である。

- 毎日 1 回ずつ計った気温：　もし明日の気温の確率分布が今日の気温のみによって定まるならば，マルコフ過程である。一方，気温の上昇あるいは下降は続いて起こりやすいという傾向があったとしよう。すると，今日の気温は同じ 20 ℃でも，昨日が 15 ℃なら明日は 20 ℃より高くなる可能性が高いし，昨日が 25 ℃なら明日は 20 ℃より低くなる可能性が高い。この場合，明日の気温の確率分布は今日の気温のみによっては定まらないので，マルコフ過程ではない。

条件付き確率密度を使うと，$\{X_i\}$ がマルコフ過程であるとは

$$
\begin{aligned}
& f(X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots | X_i, X_{i-1}, X_{i-2}, \ldots) && (2.37)\\
= \;& f(X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots | X_i) && (2.38)
\end{aligned}
$$

が成り立つことであると言える。

連続時間の確率過程 $\{X_t\}$ に対しても同様に，$X_t = x$ のとき X_u（$u > t$）の分布が，その前の履歴 $\{X_s | s < t\}$ によらずに x のみによって定まるならば，$\{X_t\}$ をマルコフ過程という。再び，本節の最初で述べた連続時間の確率過程の例がマルコフ過程になっているかどうか考えよう。

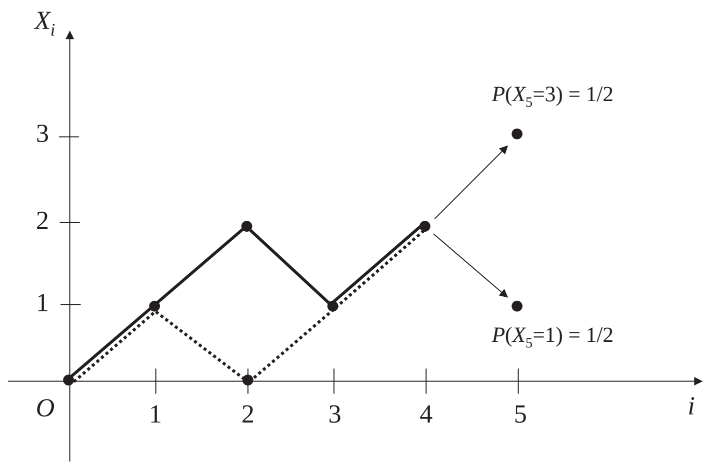

図 2.10: X_4 が与えられたときの X_5 の確率分布

- 連続的に観測した気温： 離散的な場合の例で述べたように，もし気温の上昇あるいは下降が続いて起こりやすいという傾向があるならば，現時点 t より後の気温の確率分布は現時点での気温 X_t だけからは定まらず，気温が上昇して X_t になったのか，それとも下降して X_t になったのかに依存する。この場合，確率過程はマルコフ過程ではない。

- 連続的に観測した株価： 後に述べるブラック=ショールズモデルでは，将来の株価の確率分布は現在の株価 X_t のみによって決まり，株価が過去にどんな経路を辿って X_t に到達したかにはよらないと考える。したがってこのモデルでは，株価はマルコフ過程となる[8]。

コルモゴロフの拡張定理より，X_u（$u > t$）の分布を考えることは，時刻 t より後のあらゆる有限次元分布を考えることに等価である。したがって有限次元分布を用いて定義すると，$\{X_t\}$ がマルコフ過程であるとは，

$$
\begin{aligned}
& f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n} | \{X_s | s \le t\}) && (2.39) \\
= \quad & f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n} | X_t) && (2.40)
\end{aligned}
$$

が任意の n，任意の $t_1, \dots, t_n \ge t$ について成り立つことであると言える。

マルチンゲール 離散時間の確率過程 $\{X_i\}$ に対し，

$$
E[X_{i+1} | X_i = x] = x \qquad (2.41)
$$

であるとき $\{X_i\}$ は**マルチンゲール**であるという。すなわち，マルチンゲールとは，確率変数の将来の期待値が現時点での値に等しいような確率過程の

[8] これは簡単化のためにそのようにモデル化を行ったということであり，必ずしも現実の株価がマルコフ過程だというわけではない。実際，マルコフ過程ではないような株価のモデルも存在する。

ことである。同様に，連続時間の確率過程 $\{X_t\}$ に対し，

$$E[X_u|X_t = x] = x \tag{2.42}$$

が任意の $u > t$ について成り立つならば，$\{X_t\}$ はマルチンゲールであるという。マルチンゲールの例として，次のものが挙げられる。

- ランダムウォーク：　$X_i = x$ のとき，$X_{i+1} = x+1$ または $X_{i+1} = x-1$ で，その確率は共に $\frac{1}{2}$ である。したがって X_{i+1} の期待値は x であるから (2.41) 式が成り立ち，X_i はマルチンゲールとなる。
- ランダムな力を受ける粒子の運動：　現時点での位置を $X_t = x$ とする。力を全方向から一様な確率で受けると仮定すれば，どの方向に動く確率も等しく（図 2.11），対称性より時刻 $u > t$ における位置の期待値は x となると考えられる。したがって，この場合の運動もマルチンゲールとなる。
- ブラック=ショールズモデルでは，
  　株価のランダムな動き ＝ 一定の上昇傾向 ＋ マルチンゲール
  と分解して考える。これについては後の章で詳しく説明する。

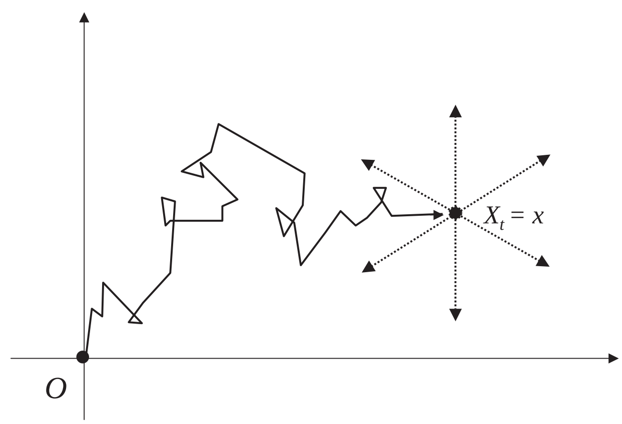

図 2.11: 平面内でランダムな力を受ける粒子の運動