

定常増分を持つ過程 いま, $s, t \in T$ で $s < t$ とする。このとき, $X_t - X_s$ を確率過程の増分という(図 2.12 参照)。増分 $X_t - X_s$ は確率変数である。

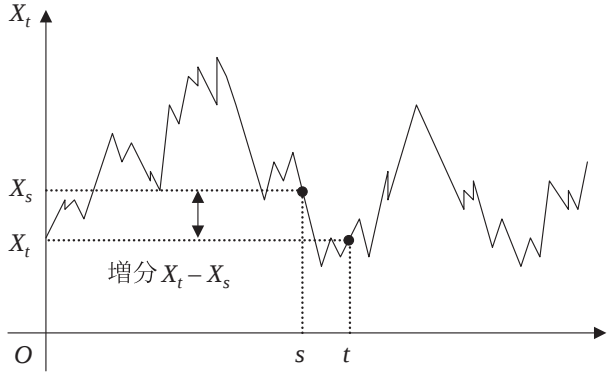


図 2.12: 確率過程の増分

$t, s, t+h, s+h \in T$ を満たす任意の t, s, h に対して $X_t - X_s$ と $X_{t+h} - X_{s+h}$ とが同じ分布に従うならば, 確率過程 X_t は定常増分を持つという。

独立増分を持つ過程 一方, 任意の n , 任意の $t_1, t_2, \dots, t_n$ に対して $X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_3} - X_{t_2}$, $\dots$, $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ が独立な確率変数であるとき, X_t は独立増分を持つという。

いま, $T = [0, \infty)$ とし, $X_0 = 0$ とする。このとき, 独立増分を持つ過程はマルコフ過程である。これを示すには, マルコフ過程の定義より, 任意の n , 任意の $t_1, t_2, \dots, t_n \geq t$ に対して

$$f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n} | \{X_s | s < t\}) = f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n} | X_t) \quad (2.43)$$

を示せばよい。 $Y_1 = X_{t_1} - X_t$, $Y_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ($i = 2, \dots, n$) とおき, $Y_1, \dots, Y_n$ の同時確率密度関数を g とすると,

$$\begin{aligned} & f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n} | \{X_s | 0 \leq s \leq t\}) \\ &= g(X_{t_1} - X_t, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} | \{X_s | 0 \leq s \leq t\}) \\ &= g(X_{t_1} - X_t, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \\ &= g(X_{t_1} - X_t, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} | X_t) \\ &= f(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n} | X_t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここで第2の等号では, 任意の s に対して $Y_1, \dots, Y_n$ が $X_s = X_s - X_0$ と独立であることより, 条件付き確率密度が条件なしの確率密度と等しくなることを使った。また, 第3の等号では, $Y_1, \dots, Y_n$ が $X_t = X_t - X_0$ と独立であることより, 条件なしの確率密度が X_t に関する条件付き確率密度と等しくなることを使った。

2.4 ブラウン運動

2.4.1 ブラウン運動の定義

本節では、前節で学んだ確率過程の基本的な概念を使い、重要な連続時間の確率過程であるブラウン運動を定義してその性質を調べる。

連続時間の確率過程 B_t は、次の4つの性質を満たすとき標準ブラウン運動またはウィーナー過程と呼ばれる。

- (i) $B_0 = 0$
- (ii) 定常増分かつ独立増分を持つ。
- (iii) 各 $t > 0$ に対し、 $B_t \sim N(0, t)$
- (iv) サンプルパスは連続

ブラウン運動は、物理や数学の様々な場面で現れる重要な確率過程である。次章で説明するブラック＝ショールズの資産価格モデルも、ブラウン運動を元にして組み立てられている。

2.4.2 ブラウン運動の性質

増分の分布 $s < t$ のとき、 $B_t - B_s$ の分布を考えると、定常増分を持つことより、

$$B_t - B_s \text{ の分布} = B_{t-s} - B_0 \text{ の分布} = B_{t-s} \text{ の分布} = N(0, t-s) \quad (2.45)$$

これと性質 (ii) より、ブラウン運動は定常独立増分を持ち、増分は $N(0, t-s)$ に従うことがわかる。

マルコフ性 ブラウン運動は独立増分を持つ過程であるから、マルコフ過程でもある。

マルチンゲール性 $u > t$ のとき $B_u - B_t \sim N(0, u-t)$ であるから、 $B_t = x$ のとき $B_u \sim N(x, u-t)$ が成り立つ (図 2.13 参照)。したがって、

$$\begin{aligned} E[B_u | B_t = x] &= N(x, u-t) \text{ の期待値} \\ &= x \end{aligned} \quad (2.46)$$

よって B_t はマルチンゲールである。

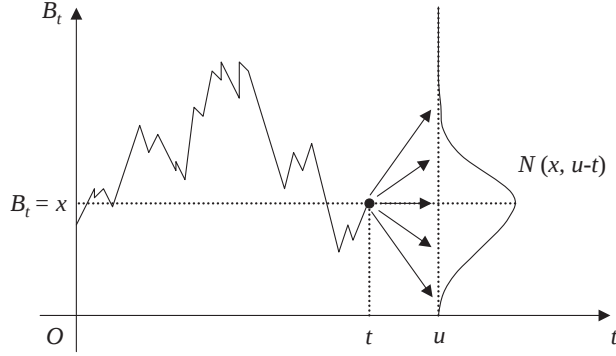


図 2.13: ブラウン運動のマルチンゲール性

微分不可能性 ブラウン運動のサンプルパスは連続であるが，至るところで微分不可能であることが知られている。ここではこれを証明する代わりに，直感的な議論により微係数

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \quad (2.47)$$

が存在しないことを示す。まず，定常増分を持つことより，

$$B_{t+h} - B_t \text{ の分布} = B_h \text{ の分布} = N(0, h) \quad (2.48)$$

したがって $B_{t+h} - B_t$ の標準偏差は $\sqrt{h}$ であるから， $B_{t+h} - B_t$ は $O(\sqrt{h})$ 程度の量である。よって，

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} = \frac{O(\sqrt{h})}{h} = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right) \rightarrow \infty \quad (h \rightarrow \infty) \quad (2.49)$$

これより，式 (2.47) の極限は存在しないと考えられる。

2.4.3 ブラウン運動のシミュレーション

ブラウン運動を近似する離散過程 区間 $[0, T]$ におけるブラウン運動 B_t のサンプルパスをシミュレーションすることを考える。まず，計算機では連続的な時間は扱えないので， $[0, T]$ を n 等分し，離散的な時点

$$t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = T \quad (2.50)$$

のみを考える。ここで， $h = T/n$ である。

ブラウン運動の性質より， $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ は独立で， $N(0, h)$ に従う。そこで， B_t をシミュレーションするには， $B_0 = 0$ から始めて 1 ステップごとに $N(0, h)$ に従う独立な乱数を加えていけばよい。 $r_i \sim N(0, 1)$ のとき $\sqrt{h}r_i \sim N(0, h)$ であるから，シミュレーションのアルゴリズムは次のようになる。

```

 $B_0 = 0$ 
do  $i=1, n$ 
     $N(0,1)$  に従う乱数  $r_i$  を発生
     $B_{t_i} = B_{t_{i-1}} + \sqrt{h}r_i$ 
end do

```

ここで、標準正規分布 $N(0,1)$ に従う乱数 r_i は、区間 $(0,1)$ の一様乱数 u (これは例えば C 言語の rand 関数により生成できる) から次のようにして作ることができる。まず、標準正規分布の確率分布関数を $F(x)$ とすると、

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2.51)$$

この $F(x)$ の逆関数 $F^{-1}(x)$ を使い、 $r = F^{-1}(u)$ とすると、 r は標準正規分布に従う。なぜなら、

$$P(r \leq x) = P(F^{-1}(u) \leq x) = P(u \leq F(x)) = F(x) \quad (2.52)$$

だからである。ここで、最後の等号では区間 $(0,1)$ の一様乱数 u と $0 < c < 1$ を満たす実数 c について成り立つ性質

$$P(u \leq c) = c \quad (2.53)$$

を用いた。この生成法を逆関数法と呼ぶ。なお、逆関数法では $F^{-1}(x)$ の計算が必要となるが、この関数は解析的な式では書けない。そこで、 $F^{-1}(x)$ は近似式により計算するのが普通である。この近似法としては、Moros の方法⁹が精度が良いとされている。

本アルゴリズムにより生成したブラウン運動のサンプルパスを図 2.14 に示す。ただし、 $T = 1.0$ 、 $n = 1000$ である。 B_t は極めて不規則に変動していることがわかる。

離散過程の極限としてのブラウン運動 このアルゴリズムで生成される離散的な確率過程に対し、 $t_{i-1} < t < t_i$ のとき直線補間によって値を定義してできる連続的な確率過程を $\bar{B}_t^{(n)}$ とすると、 $\bar{B}_t^{(n)}$ は $n \rightarrow \infty$ のときブラウン運動に収束する¹⁰ことが知られている。そこで、ブラウン運動について考える場合は、 $\bar{B}_t^{(n)}$ の極限として考えると理解しやすい。たとえば次の通りである。

- $\bar{B}_t^{(n)}$ は各微小時間 h ごとに正規分布 $N(0, h)$ に従う独立な確率変数を加え合わせてできる過程であるから、時間 t の間に加えられる確率変数の個数は約 t/h となる。ここで、正規分布に従う独立な確率変数の和の

⁹B. Moro: The Full Monte, *Risk*, Vol. 8 (Feb.), pp. 57-58 (1995) 参照。また、P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, New York, 2004 にも説明がある。

¹⁰正確には法則収束する。

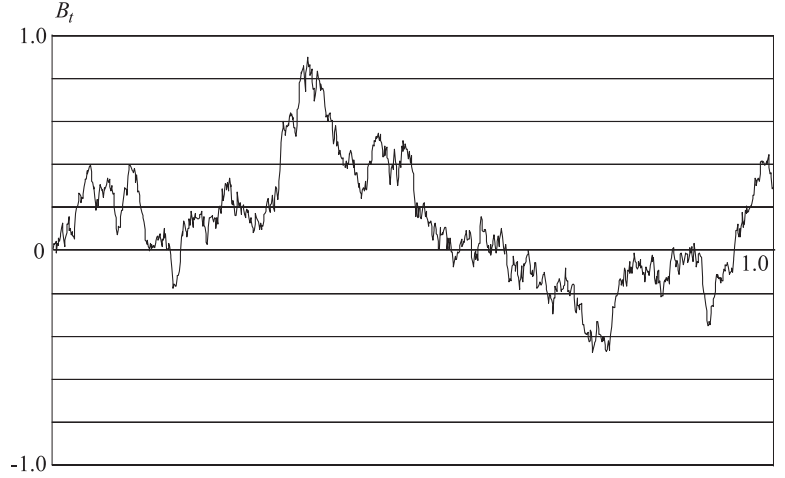


図 2.14: ブラウン運動のサンプルパス

公式 (2.36) を繰り返し使うことにより, この和は $N(0, \frac{t}{h} \cdot h) = N(0, t)$ に従うことがわかる。これより, ブラウン運動の定義 (iii) が導ける。

- 同様に, $\bar{B}_t^{(n)} - \bar{B}_s^{(n)}$ は $N(0, h)$ に従う独立な確率変数を $(t - s)/h$ 個 加え合わせてできる確率変数であるから, $N(0, t - s)$ に従う。これは $t - s$ のみに依存するから, $\bar{B}_t^{(n)}$ は定常増分を持つ。
- $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ に対して $\bar{B}_{t_2}^{(n)} - \bar{B}_{t_1}^{(n)}, \bar{B}_{t_3}^{(n)} - \bar{B}_{t_2}^{(n)}, \dots, \bar{B}_{t_m}^{(n)} - \bar{B}_{t_{m-1}}^{(n)}$ を考えると, $\bar{B}_{t_2}^{(n)} - \bar{B}_{t_1}^{(n)}$ を構成する $(t_2 - t_1)/h$ 個の確率変数, $\bar{B}_{t_3}^{(n)} - \bar{B}_{t_2}^{(n)}$ を構成する $(t_3 - t_2)/h$ 個の確率変数, $\dots$, $\bar{B}_{t_m}^{(n)} - \bar{B}_{t_{m-1}}^{(n)}$ を構成する $(t_m - t_{m-1})/h$ 個の確率変数はすべて独立である。したがって, $\bar{B}_{t_2}^{(n)} - \bar{B}_{t_1}^{(n)}, \bar{B}_{t_3}^{(n)} - \bar{B}_{t_2}^{(n)}, \dots, \bar{B}_{t_m}^{(n)} - \bar{B}_{t_{m-1}}^{(n)}$ も独立であり, $\bar{B}_t^{(n)}$ は独立増分を持つ。
- 時刻 t 以後の過程 $\{\bar{B}_u^{(n)} | u > t\}$ を考える。 $\bar{B}_u^{(n)}$ は $\bar{B}_t^{(n)}$ から出発し, 正規分布 $N(0, h)$ に従う独立な確率変数を加え合わせてできる過程であるから, その分布は出発点での値 $\bar{B}_t^{(n)}$ のみに依存し, $\bar{B}_t^{(n)}$ に到達するまでに辿ってきた経路には依存しない。したがって $\bar{B}_t^{(n)}$ はマルコフ過程である。
- $\bar{B}_t^{(n)} = x$ とし, $u > t$ における確率過程の値 $\bar{B}_u^{(n)}$ の分布を考える。 $\bar{B}_u^{(n)}$ は出発点での値 $\bar{B}_t^{(n)} = x$ に正規分布 $N(0, h)$ に従う独立な確率変数を $(u - t)/h$ 個加え合わせてできるから, 出発点からの値のずれは $N(0, u - t)$ に従う。したがって, その期待値は 0 であり, $E[\bar{B}_u^{(n)} | \bar{B}_t^{(n)} = x] = x$ が成り立つ。すなわち, $\bar{B}_t^{(n)}$ はマルチンゲールである。

以降の章でも, 必要に応じて, ブラウン運動が $\bar{B}_t^{(n)}$ の極限として与えられることを用いる。

2.4.4 ブラウン運動から生成される確率過程

定義 ブラウン運動をもとにして，より複雑な確率過程を定義することができる。そのため，まず通常の微分方程式

$$\frac{dX_t}{dt} = a(t, X_t) \quad X_0 = x_0 \quad (2.54)$$

を考える。この微分方程式は，微小時間 dt における X_t の変化が

$$dX_t = a(t, X_t)dt \quad (2.55)$$

により与えられることを示している。ここで，方程式の右辺に，ブラウン運動によるランダムなノイズの項を加えた式を考える。

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \quad (2.56)$$

ここで， dB_t は微小時間 dt におけるブラウン運動の増分であり， $N(0, dt)$ に従う確率変数である。右辺にこのランダムな項が入った結果， X_t も確率過程となり，その経路はブラウン運動のサンプルパスに対応して定まることになる。 X_t をブラウン運動から生成される確率過程と呼び，この方程式を確率微分方程式と呼ぶ。

なお，上記の式の両辺を dt で割って確率微分方程式を

$$\frac{dX_t}{dt} = a(t, X_t) + b(t, X_t)\frac{dB_t}{dt} \quad (2.57)$$

と書くことはできない。これは，2.4.2 節で述べたように，ブラウン運動の微分 $\frac{dB_t}{dt}$ が存在しないからである。これに対して dB_t は，微小時間 dt におけるブラウン運動の増分として正しく定義できる。