簡単な例 ブラウン運動から生成される確率過程のもっとも簡単な例として，次のように $a(t, X_t)$，$b(t, X_t)$ が定数の場合が考えられる。

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \quad （\mu,\sigma は定数） \tag{2.58}$$

この確率微分方程式は次のようにして簡単に解くことができる。まず，式 (2.58) において dX_t，dB_t はそれぞれ確率過程 X_t，B_t の微小時刻 dt の間における増分であるから，この定義に従って式を書き直すと，

$$X_{t+dt} - X_t = \mu dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t) \tag{2.59}$$

ここで，式 (2.59) に $t = 0, dt, 2dt, \ldots, t - dt$ を順に代入すると，

$$\begin{aligned} X_{dt} - X_0 &= \mu dt + \sigma(B_{dt} - B_0) \\ X_{2dt} - X_{dt} &= \mu dt + \sigma(B_{2dt} - B_{dt}) \\ &\vdots \\ X_t - X_{t-dt} &= \mu dt + \sigma(B_t - B_{t-dt}) \end{aligned} \tag{2.60}$$

これらをすべて足し合わせて $B_0 = 0$ に注意すると，

$$X_t - X_0 = \mu t + \sigma B_t \tag{2.61}$$

すなわち，

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t \tag{2.62}$$

こうして，確率微分方程式を解いて X_t を B_t の関数として陽に表すことができた。

式 (2.62) から明らかなように，X_t は単調増加する確定的な成分 μt とブラウン運動に比例する成分 σB_t とから成っている。この μ を**ドリフト**と呼ぶ。X_t をシミュレーションした結果を図 2.15 に示す。

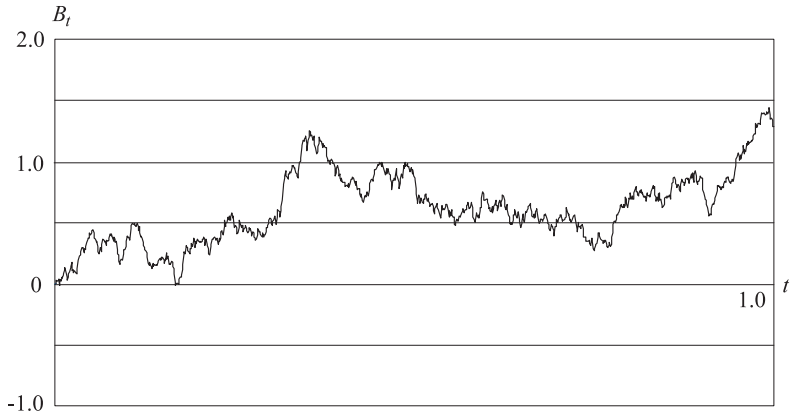

図 2.15: ドリフトを持つブラウン運動のサンプルパス

第3章　ブラック-ショールズの資産価格モデル

本章では，時間が連続で価格も連続的に変化する場合の資産価格モデルを扱う。このようなモデルのうち，もっとも簡単なモデルがブラック-ショールズの資産価格モデルである。本章では，前章で学んだ確率過程の理論を基礎としてこのモデルを学ぶ。また，伊藤の公式を用いて資産価格をブラウン運動の関数として表す方法，資産価格のシミュレーションを行う方法についても議論する。

3.1　資産価格のモデル化

3.1.1　安全資産のモデル

1.4 節で考えたオプション価格計算のための簡単なモデルでは，株式の他に安全資産と呼ばれる利回りが確定した資産の存在を仮定した。ここでは連続時間でかつ価格が連続的に変化する場合に，安全資産のモデル化を考える。

まず，簡単なモデルでは，1 円を安全資産に投資した（たとえば銀行に預けた）場合，１年後（満期を１年後とする）に R 円の利子が付くと仮定した。これは元金+利子が１年後に不連続な変化をすることを意味するが，ここでは数学的な扱いやすさのため，連続的な変化をするモデルを考えたい。

そこで，１年を n 等分し，各区間において区間の最初における元金の $\frac{r}{n}$ の利子が付くというモデルを考える。更に，付いた利子は直ちに元金に繰り入れることにする。すると，これは複利計算になるから元金は各区間ごとに $1+\frac{r}{n}$ 倍に増え，１年の終わりには１円の元金は $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ 円となる（図 3.1）。

ここで $n \to \infty$ とすると，

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \to e^r \tag{3.1}$$

となる。したがって，

$$e^r = 1 + R \tag{3.2}$$

と r を定めれば，連続的に利子が付き，かつ１年後の利子の合計が R となるようなモデルが作れる。この r を**連続複利利子率**と呼ぶ。

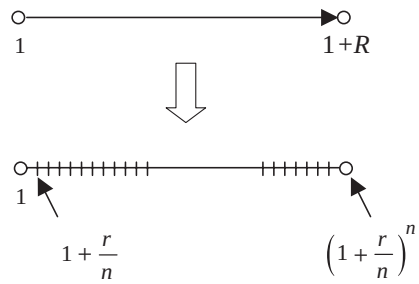

図 3.1: ドリフトを持つブラウン運動のサンプルパス

連続複利利子率が r のとき，時刻 0 で M_0 円を安全資産に投資したとすると，時刻 t でのその価値は

$$M_t = M_0 e^{rt} \tag{3.3}$$

となる。したがって M_t の満たす微分方程式は

$$\frac{dM_t}{dt} = rM_0 e^{rt} = rM_t, \tag{3.4}$$

確率微分方程式と同様の形式で書くと

$$dM_t = rM_t\,dt \tag{3.5}$$

あるいは

$$\frac{dM_t}{M_t} = r\,dt \tag{3.6}$$

となる。一般に，式 (3.6) の左辺のように投資によって得られる収益を投資額で割った値を**収益率**と呼ぶ。式 (3.6) は安全資産の微小時間 dt における収益率が rdt であることを示す。

3.1.2　危険資産のモデル

次に，株式，為替レートなど，価格が確率的に変動する危険資産のモデル化を考える。いま，危険資産の時刻 t における価格を S_t とするとき，微小時間 dt におけるその収益率は

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \frac{dS_t}{S_t} \tag{3.7}$$

である。この収益率を次のように 2 つの部分の和としてモデル化する。

$$\begin{cases} \text{確定的な部分} & \mu\,dt \\ \text{確率的な部分} & \sigma\,dB_t \end{cases} \tag{3.8}$$

このうち確定的な部分からは，安全資産と同様，収益率 μdt で確実な収益が得られる。一方，確率的な部分からの収益はブラウン運動の増分 dB_t により定義される。ブラウン運動の性質より $dB_t \sim N(0, dt)$ であるから，確率的な部分からの収益率は $N(0, \sigma^2 dt)$ に従う確率変数となる。これらを合わせて S_t の時間変化は

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dB_t \tag{3.9}$$

あるいは

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dB_t \tag{3.10}$$

とモデル化される。このモデルを**ブラック-ショールズモデル**と呼ぶ。

σ は確率的な変動の激しさを表す量であり，**ボラティリティ**と呼ばれる。一般に，安定した会社の株価は収益率は低いがボラティリティも小さいため暴落などのリスクが小さく，一方，ベンチャー企業の株価は収益率は高いがボラティリティも大きいためリスクが大きい。このように，ブラック-ショールズモデルでは，様々な危険資産を収益率とボラティリティという 2 つのパラメータによって特徴付ける。

3.2 伊藤の公式

ブラック-ショールズモデルの下では，株価はどんな動きをするのだろうか。この疑問に答えるには，式 (3.10) の確率微分方程式を解き，株価を B_t の関数として表す必要がある。本節では，そのために用いる伊藤の公式について述べる。伊藤の公式は，次章でブラック-ショールズ方程式を導くにあたっても重要な役割を果たす。

いま，確率微分方程式

$$dX_t = a(t, X_t)\, dt + b(t, X_t)\, dB_t \tag{3.11}$$

によって定義される確率過程 X_t に対し，その関数 $f(t, X_t)$ を考える。ここで，関数 f, a, b は十分滑らか，すなわち必要な回数だけ微分可能であるとする。このとき，微小時間 dt における $f(t, X_t)$ の変化 df はテイラー展開により次のように書ける。

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(dX_t)^2 + \cdots \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}(a\, dt + b\, dB_t) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}(a^2\, dt^2 + 2ab\, dt\, dB_t + b^2\, dB_t^2) + \cdots \end{aligned} \tag{3.12}$$

いま，$O(dt)$ までの項を考えることにすると，dt^2 という因子を持つ項は消える。また，$dB_t = O(\sqrt{dt})$ であるから，$dt\,dB_t$ という因子を持つ項も消える。一方，$dB_t^2 = O(\sqrt{dt}^2)$=$O(dt)$ であるから，この因子を持つ項は残る。この因子の期待値を計算すると，

$$\begin{aligned} E\left[(dB_t^2)\right] &= E\left[(dB_t^2)\right] - \left(E\left[dB_t\right]\right)^2 \\ &= V\left[dB_t\right] \\ &= dt \end{aligned} \tag{3.13}$$

となるが，詳しい数学的議論を行うと，実は式 (3.12) において dB_t^2 をこの期待値 dt で置き換えてよいことがわかる[1]。そこで，式 (3.12) でこの置き換えを行い，dt の 1 次までの項を取って整理すると次のようになる。

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} a(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \left(b(t, X_t)\right)^2 \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} b(t, X_t)\, dB_t \tag{3.14}$$

これを**伊藤の公式**と呼ぶ。

3.3　資産価格の解

伊藤の公式を利用すると，式 (3.10) の確率微分方程式を解くことができる。いま，S_t の関数 $x_t = \log S_t$ を考えて伊藤の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} dx_t &= \left\{ \frac{\partial(\log S_t)}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\log S_t)}{\partial S_t^2} \right\} dt + \frac{\partial(\log S_t)}{\partial S_t} \sigma S_t\, dB_t \\ &= \left\{ \frac{1}{S} \mu S_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma S_t)^2 \right\} dt + \frac{1}{S} \sigma S_t\, dB_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma\, dB_t \end{aligned} \tag{3.15}$$

よって x_t は定数係数の確率微分方程式を満たす。これは 2.4.4 節で述べた方法によって解くことができ，解は

$$x_t = x_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \tag{3.16}$$

となる。ここで，$S_t = \exp(x_t)$ であることを用いると，資産価格は

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\} \tag{3.17}$$

と B_t の関数として求めることができる。このように，ブラウン運動の指数関数として定義される確率過程を**幾何ブラウン運動**と言う。

[1] df が正確には確率積分として定義されることによる。たとえば 津野義道「ファイナンスの確率積分 - 伊藤の公式，Girsanov の定理，Black-Scholes の公式」，共立出版，2001. を参照。

3.4 資産価格のシミュレーション

確率微分方程式の解 (3.17) を用いると，資産価格のシミュレーションを行うことができる。いま，区間 $[0,T]$ を n 等分し，離散的な時点

$$t_0 = 0,\ t_1 = h,\ t_2 = 2h,\ \ldots,\ t_n = T \tag{3.18}$$

での資産価格をシミュレーションすることを考える。$h = T/n$ とすると，

$$\begin{aligned} S_{t_i} &= S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_{i-1} + h + \sigma\left(B_{t_{i-1}} + \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right)\right\} \\ &= S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_{i-1} + \sigma B_{t_{i-1}}\right\} \\ &\qquad \times \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) h + \sigma\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right\} \\ &= S_{t_{i-1}} \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) h + \sigma\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ここで，$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0,h)$ であるから，$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0,h)$ は標準正規分布に従う乱数 r_i を用いて $\sqrt{h} r_i$ と書ける。これより，シミュレーションのアルゴリズムは次のようになる。

S_0 を設定
do i=1, n
　$N(0,1)$ に従う乱数 r_i を発生
　$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) h + \sigma\sqrt{h} r_i\right\}$
end do

本アルゴリズムに基づき $\mu = 0.05$，$\sigma = 0.2$ の場合に資産価格のシミュレーションを行った例を図 3.2 に示す。ただし，期間は $[0,1]$ とし，$n = 1000$ として 3 通りのサンプルパスを生成した。この μ，σ の値は，比較的安定した企業の株価の場合に相当する。

また，同じ条件で $\mu = 0.2$，$\sigma = 0.3$ の場合のシミュレーションを行った例を図 3.3 に示す。この μ，σ の値は，ハイリスク・ハイリターンのベンチャー企業などの場合に相当する。図 3.2 と比べると値動きは激しいが，値上がりした場合は大きな利益が得られる様子がシミュレーションできていることがわかる。

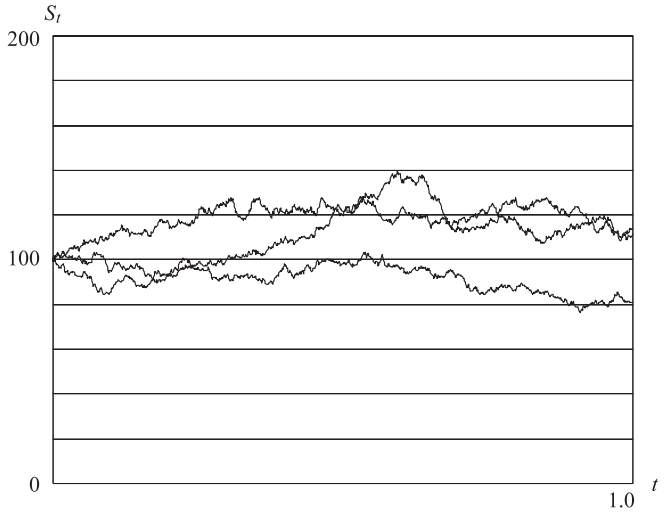

図 3.2: 資産価格のサンプルパス（$\mu = 0.05$，$\sigma = 0.2$）

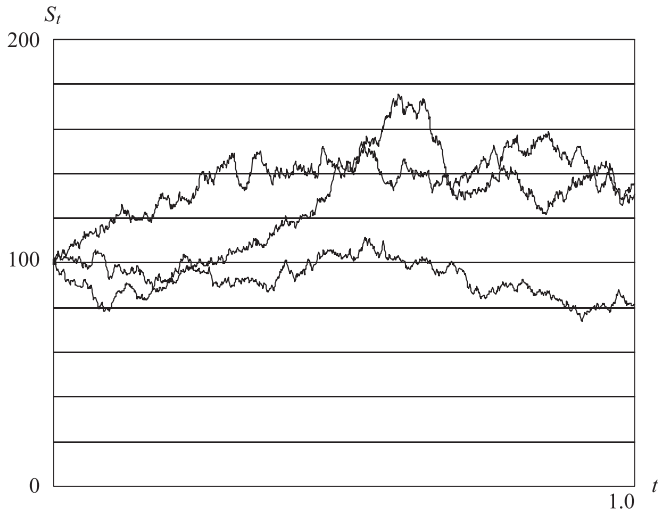

図 3.3: 資産価格のサンプルパス（$\mu = 0.2$，$\sigma = 0.3$）

第4章　ブラック-ショールズのオプション価格公式

本章では，ブラック-ショールズの資産価格モデルに基づき，ヨーロピアンオプション価格の公式を求める。そのため，まず第1章で述べた簡単なモデルの場合と同様に複製ポートフォリオを考える。そして，これに対して無裁定条件を適用することにより，オプション価格の満たす偏微分方程式を求める。この方程式は変数変換を用いて解析的に解くことができ，その結果がブラック-ショールズのオプション価格公式となる。

4.1　ブラック-ショールズの偏微分方程式

第1章で扱った簡単なモデルでは，時刻 T においてオプションと同じペイオフを持つような安全資産と株式の組み合わせ（複製ポートフォリオ）を考え，時刻 T で同じ価値を持つ資産は時刻0においても同じ価値を持たなければならないという原理（無裁定条件）から時刻0におけるオプションの価格を導いた。

ブラック-ショールズモデルの場合のオプション価格導出も，原理は全く同じである。ただし，今度は株式とオプションからなる複製ポートフォリオを考え，それが微小時間 dt の間に安全資産と全く同じ（すなわち確定的な）収益を上げるように両者の比率を調節した上で，このポートフォリオに対して無裁定条件を適用する。

いま，資産 S_t に対するオプションを考え，時刻 t，株価 S_t のときのオプション価格がこの2つの関数として $V(t, S_t)$ と書けると仮定する[1]。このとき，伊藤の公式より，時刻 t と $t+dt$ の間の V の微小変化 dV は次のようになる。

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S\, dB \tag{4.1}$$

ただし，表記の煩雑さを避けるため，S_t，B_t などの添字は省いた。ここで，オプション1単位と資産 $-\Delta$ 単位からなるポートフォリオを考える。ただし，Δ は定数とする。このポートフォリオの微小時間 dt における価値変化は式

[1]オプション価格がこの2つのみの関数として書け，t より前の資産価格 $\{S_s | s < t\}$ には依存しないということは自明ではないが，ヨーロピアンオプションの場合にはこの仮定は正しいことが示せる。

(4.1) および式 (3.10) より,

$$
\begin{aligned}
d(V - \Delta S) &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - \Delta \mu S \right) dt \\
&\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S \, dB \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

となる。