ここで，特に $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ と選ぶと，ブラウン運動 dB_t の項の係数が消えて

$$d(V - \Delta S) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \tag{4.3}$$

となる。したがって，Δ をこのように選んだ場合，$V - \Delta S$ の変化は確率的ではなく，確定的となる。すなわち，ポートフォリオ $V - \Delta S$ は安全資産となる。ところで，安全資産の収益率（利子率）は r であったから，もしこのポートフォリオの収益率が r でないとすると，無裁定条件に反する。したがって

$$d(V - \Delta S) = r(V - \Delta S)dt \tag{4.4}$$

でなくてはならない。これを(4.3) 式に代入すると，

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \tag{4.5}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rV = 0 \tag{4.6}$$

となる。これがオプション価格の満たすべき偏微分方程式である。これを**ブラック-ショールズの偏微分方程式**と呼ぶ。

4.1.2 初期条件と境界条件

ブラック-ショールズの偏微分方程式を解いてオプション価格を求めるには，初期条件と境界条件を指定する必要がある。ヨーロピアン・コールオプションの場合，定義域，初期条件，境界条件は以下のようになる。

定義域　時間 t の範囲は 0 から満期 T まで，資産価格の取り得る値は 0 以上の任意の値であるから，定義域は

$$[0, T] \times [0, \infty) \tag{4.7}$$

である。

初期条件　満期 T でのオプション価値を考えることにより，$t = T$ における初期条件（正確には終端条件）が次のように定まる。

$$\begin{aligned} V(T, S) &= \text{ペイオフ} \\ &= \max(S_T - K, 0) \end{aligned} \tag{4.8}$$

境界条件 境界条件は $S=0$ と $S\to\infty$ に対して定義される。

$S=0$ の時：

式 (3.17) において $0\to t$, $t\to T$ とすると，

$$S_T = S_t \exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(B_T-B_t)\right\} \tag{4.9}$$

であるから，

$$S_t=0 \Rightarrow S_T=0 \tag{4.10}$$

が成り立ち，このとき満期におけるオプション価値は $\max(0-K,0)=0$ となる。将来価値が 0 となることがわかっているオプションの現在価値は明らかに 0 であるから，

$$V(0,t)=0 \tag{4.11}$$

となる。これが $S=0$ での境界条件である。

$S\to\infty$ の時：

このときの境界条件を厳密に求めるのは困難であるが，次のように考える。まず，時刻 t での資産価格を $S\gg K$ とし，これが満期 T まで安全資産と同じ率 r で確定的に増加すると仮定する。すると，満期でのオプション価値は $\max(Se^{r(T-t)}-K,0)=Se^{r(T-t)}-K$ となる。満期で確実にこれだけの利益が得られるのだから，このオプションは安全資産であり，その現在価値 $V(S,t)$ は，満期で同じ払い戻し額を持つ銀行預金の現在価値，すなわち

$$V(S,t)=e^{-r(T-t)}(Se^{r(T-t)}-K)=S-Ke^{-r(T-t)} \tag{4.12}$$

となる。これが $S\to\infty$ のときの境界条件である。なお，$S\gg K$ のため，この条件は簡単に

$$V(S,t)\sim S \tag{4.13}$$

としてもよい。

4.2 ブラック-ショールズのオプション価格公式

4.2.1 熱伝導方程式への変形

変数変換による方程式の簡単化 ブラック-ショールズの偏微分方程式(4.3) を初期条件(4.8)，境界条件(4.9)，(4.13) の下で解くことにより，ヨーロピアン・コールオプションの価格を求めることができる。ただし，この偏微分方程式は微分の係数に S や S^2 が入った複雑な形をしているため，解きやすいように変数変換を行って簡単な方程式に変形する。まず， $\log S=x$ とおくと，

$$\frac{\partial}{\partial S}=\frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2}=\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\right)=-\frac{1}{S^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{S}\left(\frac{\partial}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x}\right)=-\frac{1}{S^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{S^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{4.15}$$

$\tau'=T-t$ とおくと，

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial \tau'} \tag{4.16}$$

これらを代入すると，

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau'}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV=0 \tag{4.17}$$

こうして，係数がすべて定数の方程式へと変形できた。次に，V と $\frac{\partial V}{\partial x}$ の項を消去するために $V=e^{\alpha x+\beta\tau'}U$ とおいて代入すると，

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial \tau'}+&\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\alpha\sigma^2\right\}\frac{\partial U}{\partial x}\\&+\left\{-\beta+\alpha\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2-r\right\}U=0\end{aligned} \tag{4.18}$$

この方程式において U および $\frac{\partial U}{\partial x}$ の項を消去するには，

$$\begin{cases}\left(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)+\alpha\sigma^2=0\\-\beta+(\alpha-1)r+\dfrac{1}{2}\sigma^2\alpha(\alpha-1)=0\end{cases} \tag{4.19}$$

となるように α,β を定めればよい。すなわち，

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{r}{\sigma^2}\\\beta=-\dfrac{1}{8\sigma^2}(\sigma^2+2r)^2\end{cases} \tag{4.20}$$

とする。これを代入すると，

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau'}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0 \tag{4.21}$$

最後に $\tau=\tau'\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)$ とおくと，

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{4.22}$$

となり，ブラック-ショールズ方程式は最終的に**熱伝導方程式**に変形される。

初期条件と境界条件の変換　以上のような独立変数・従属変数の変換により，初期条件と境界条件は次のように変換される。

$$\text{初期条件：}\quad U_0(x)=\max\left(e^{(1-\alpha)x}-Ke^{-\alpha x},0\right) \tag{4.23}$$

$$\text{境界条件：}\quad\begin{cases}x\to-\infty\text{ の時：}\quad e^{\alpha x+\beta\tau'}U\to 0\\x\to+\infty\text{ の時：}\quad e^{\alpha x+\beta\tau'}U\to e^x\end{cases} \tag{4.24}$$

4.2.2　熱伝導方程式の基本解と重ね合わせの原理

重ね合わせの原理　熱伝導方程式の初期値問題を解くには，**重ね合わせの原理**を用いる。これは，関数 $U_1(\tau,x)$，$U_2(\tau,x)$ が共に方程式(4.22) の解ならばその任意の線形結合

$$c_1U_1(\tau,x)+c_2U_2(\tau,x) \tag{4.25}$$

もまた(4.22) の解となるという原理である。この原理は，連続的なパラメータ λ を持つ解の集合 $\{U_\lambda(\tau,x)\}$ に対しても拡張でき，$U_\lambda(\tau,x)$ に重み c_λ をかけて足し合わせた（すなわち積分した）関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_\lambda U_\lambda(\tau,x)\,d\lambda \tag{4.26}$$

もまた(4.22) の解となることが示せる。

ここで，もし重み c_λ をうまく選ぶことにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_\lambda U_\lambda(0,x)\,d\lambda = U_0(x) \tag{4.27}$$

が成り立つようにできれば，式 () は初期条件を満たす熱伝導方程式の解となり，初期値問題が解けたことになる。

デルタ関数と基本解　以上の事実を使って初期値問題を解くため，まず**デルタ関数** $\delta(x)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}&\delta(x)=0 \quad (x\neq 0),\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1\end{aligned} \tag{4.28}$$

通常の関数の場合，1 点以外で 0 であれば積分値も 0 となるので，$\delta(x)$ は通常の意味での関数ではなく，**超関数**と呼ばれる。デルタ関数の基本的な性質として，次のことが成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\delta(x-x_0)\,dx_0 = f(x) \tag{4.29}$$

ここで，$f(x)$ は任意の関数である。

次に，初期値 $U_0(x)=\delta(x-x_0)$ に対する熱伝導方程式(4.22) の解を考える。この解は**基本解**と呼ばれ，次のように与えられる[2]。

$$U_{x_0}(\tau,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right\} \tag{4.30}$$

[2] これが実際に熱伝導方程式の解であり，かつ $\tau\to 0$ のとき $\delta(x-x_0)$ となることは，簡単な計算により確かめられる。なお，この解を求めるには，たとえばフーリエ変換を使えばよい。

いま，初期条件 $U_0(x)$ と基本解 $U_{x_0}(\tau,x)$ とを使って

$$U(\tau,x)=\int_{-\infty}^{\infty}U_0(x_0)\,U_{x_0}(\tau,x)\,dx_0 \tag{4.31}$$

という関数を作ると，これは基本解の重ね合わせであるから熱伝導方程式(4.22)の解であり，かつ

$$\begin{aligned}U(0,x) &= \int_{-\infty}^{\infty}U_0(x_0)\,U_{x_0}(0,x)\,dx_0\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}U_0(x_0)\,\delta(x-x_0)\,dx_0\\ &= U_0(x)\end{aligned} \tag{4.32}$$

であるから，初期条件も満たす。以上より，熱伝導方程式の初期値問題は(4.31)式の積分を実行しさえすれば解けることがわかった。

4.2.3 ブラック-ショールズのオプション価格公式

コールオプションの価格計算問題では，初期値

$$U_0(x)=\begin{cases}e^{(1-\alpha)x}-Ke^{-\alpha x} & (x\geqq\log K)\\ 0 & (x<\log K)\end{cases} \tag{4.33}$$

式(4.33) と式(4.30) とを式(4.31) に代入することにより，解は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}U(\tau,x)=&\int_{\log K}^{\infty}\left\{e^{(1-\alpha)x}-Ke^{-\alpha x_0}\right\}\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right\}dx_0\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\\ =&\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{\log K}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left\{-(x-x_0)^2-4\tau(1-\alpha)x_0\right\}\right]dx_0\\ &-\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{\log K}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left\{-(x-x_0)^2+4\tau\alpha x_0\right\}\right]dx_0\end{aligned} \tag{4.34}$$

ここで，exp の中を x_0 について平方完成すると，

$$\begin{aligned}U(\tau,x)=&\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{\log K}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left\{x_0-(x+2\tau(1-\alpha))\right\}^2+x(1-\alpha)+\tau(1-\alpha)^2\right]dx_0\\ &-\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{\log K}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{4\tau}\left\{x_0-(x-2\tau\alpha)\right\}^2-x\alpha+\tau\alpha^2\right]dx_0\end{aligned} \tag{4.35}$$

更に，$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}e^{-z^2/2}dz$（すなわち $\Phi(z)$ は標準正規分布の分布関数）とおくと，この式の積分は $\Phi(z)$ を使って表すことができ，

$$\begin{aligned}U(\tau,x)=&\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left\{-\log K+x+2\tau(1-\alpha)\right\}\right)\exp\left\{x(1-\alpha)+\tau(1-\alpha)^2\right\}\\ &-K\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left\{-\log K+x-2\tau\alpha\right\}\right)\exp\left(-x\alpha+\tau\alpha^2\right)\end{aligned} \tag{4.36}$$

となる。ここで，

$$\begin{cases} V = e^{\alpha x + \beta \tau'} U \\ x = \log S \\ \tau = \dfrac{1}{2}\sigma^2 \tau' = \dfrac{1}{2}\sigma^2 (T - t) \\ \alpha, \beta \text{の定義} \end{cases}$$

を代入すると，

$$V(t, S) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{4.37}$$

$$\text{ただし，}\quad \begin{cases} d_1 = \dfrac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\ d_2 = \dfrac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \end{cases}$$

となる。なお，以上では境界条件のことは陽に考慮しなかったが，この解は境界条件 (4.11)，(4.13) も満たすことが示せる。したがって(4.37) は時刻 t，資産価格 S のときにヨーロピアン・コールオプションの価格を与える式となる。これは**ブラック-ショールズの公式**と呼ばれる。