

4.2.4 オプション価格の計算例

ブラック-ショールズ公式によりヨーロピアン・コールオプションの価格を計算した例を図 4.1 に示す。ここで、 $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $S_0 = 100$ であり、行使価格 K の関数としてのオプション価格を $T = 0$ から $T = 1.0$ までの複数の満期について描いた。

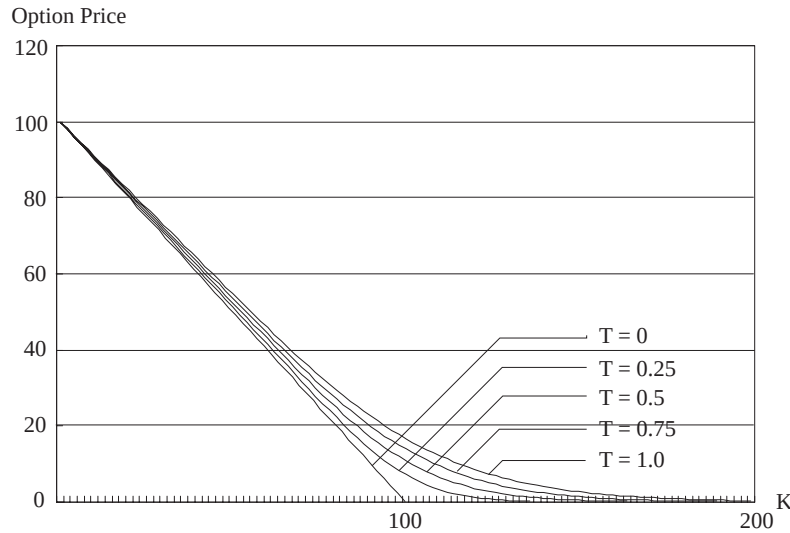


図 4.1: ブラック-ショールズ公式により計算したコールオプション価格

グラフより、オプション価格は K に関して単調減少の関数であり、 $T = 0$ のときはオプションのペイオフ $\max(S_T - K, 0)$ に一致することがわかる。また、価格は T が大きくなるにつれて上昇し、滑らかな関数になっている。これより、ブラック-ショールズの公式で得られる価格は、実際に市場で観測されるオプション価格（第 1 回レポート参照）の特徴をよく再現していることがわかる。

4.3 プット・コール・パリティ

以上ではヨーロピアン・コールオプションの場合を考えたが、プットオプションに対しても同様に初期条件・境界条件を与えてブラック-ショールズの偏微分方程式(4.6)を解くことにより、価格公式を導くことができる。

しかし、コールオプションの価格とプットオプションの価格の間には**プット・コール・パリティ**と呼ばれる関係式が成り立ち、これを使うととっても簡単にプットオプションの価格公式を導出することができる。これについては第 2 回のレポート課題を参照のこと。

第5章 差分法によるオプション価格計算

5.1 問題設定

前章では、ブラック-ショールズの偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rV = 0 \quad (5.1)$$

に対して変数変換

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 \tau' = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) \quad (5.2)$$

$$x = \log S \quad (5.3)$$

$$V = e^{\alpha x + \beta \tau'} U \quad (5.4)$$

を施し、その結果得られる熱伝導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.5)$$

を適当な初期条件・境界条件の下で解くことにより、コールオプション価格の解析解（ブラック-ショールズ公式）を求めた。

ヨーロピアン・コールオプションあるいはプットオプションの場合、ペイオフは S_T の関数として見たとき区分的に線形の比較的簡単な関数となっている（図 5.1 参照）。しかし、より複雑なペイオフを持つオプション、あるいはブラック-ショールズモデルより高度なモデルの下でのオプションの価格は解析的には求められないことが多く、その場合には数値計算が必要となる。本章ではそのための数値解法のうち、**差分法**について説明する。

解析解を求める場合と同様、差分法を適用する場合にも、まず変数変換 (5.2) ～ (5.4) を行って方程式を熱伝導方程式に変換しておくほうが、計算精度や計算の安定性の面で有利である。そこで、以下では次の熱伝導方程式の初期値問題に対して差分法を適用することを考える。

熱伝導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.6)$$

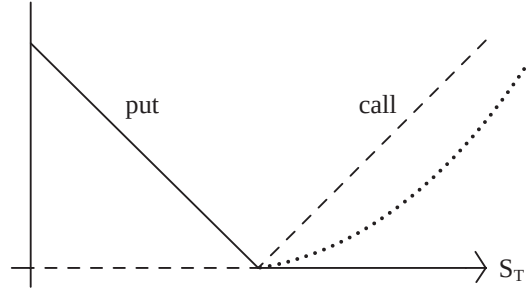


図 5.1: オプションの種類とペイオフ

初期条件

$$U(0, x) = U_0(x) \quad (5.7)$$

境界条件

$$U(\tau, x_{\min}) = U_{\min}(\tau) \quad (5.8)$$

$$U(\tau, x_{\max}) = U_{\max}(\tau) \quad (5.9)$$

解析解を求める場合は、 x の定義域は $(-\infty, \infty)$ で考えたが、計算機では無限の領域は扱えないため、 x の値に上限・下限を設ける必要がある。ここでは、 x の取り得る値の範囲を $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ とした。この初期値問題の解析領域を図 5.2 に示す。

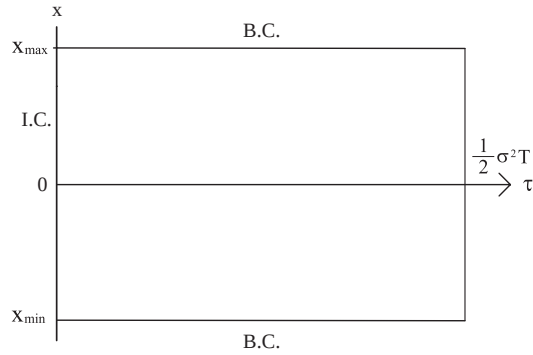


図 5.2: 初期値問題の解析領域

5.2 陽的差分法

5.2.1 差分による微分の近似

差分法では、図 5.2 の領域を図 5.3 のように格子状に分割し、各格子点における U の値を用いて偏微分方程式 (5.6) を近似する。格子の縦横の間隔は全領域にわたって均一であるとし、 τ 方向の間隔を $\Delta\tau$ 、 x 方向の間隔を Δx とする。

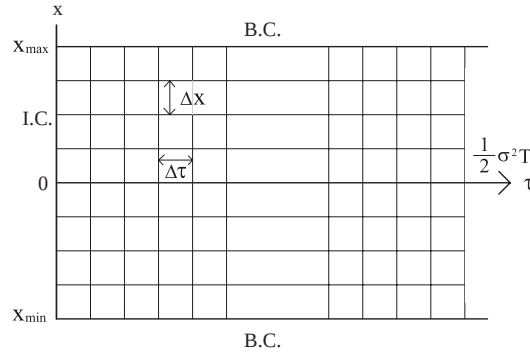


図 5.3: 格子による解析領域の分割

いま、 $U(\tau + \Delta\tau)$ を τ の周りでテイラー展開すると、

$$U(\tau + \Delta\tau) = U(\tau) + \Delta\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(\Delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dots \quad (5.10)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{U(\tau + \Delta\tau) - U(\tau)}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Delta\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dots \\ &= \frac{U(\tau + \Delta\tau) - U(\tau)}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau) \end{aligned} \quad (5.11)$$

が成り立つ。この右辺第 1 項による $\frac{\partial U}{\partial \tau}$ の近似を**前進差分**による近似と呼ぶ。この近似の誤差は $O(\tau)$ である。

一方、 $U(x \pm \Delta x)$ を x の周りでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} U(x + \Delta x) &= U(x) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots \\ U(x - \Delta x) &= U(x) - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots \end{aligned}$$

が得られる。ここで、両辺を足すと、

$$U(x + \Delta x) + U(x - \Delta x) = 2U(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{12}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots \quad (5.12)$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{U(x + \Delta x) - 2U(x) + U(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \\ &= \frac{U(x + \Delta x) - 2U(x) + U(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)\end{aligned}\quad (5.13)$$

が成り立つ。この右辺第1項による $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ の近似を**中心差分**による近似と呼ぶ。この近似の誤差は $O((\Delta x)^2)$ である。

5.2.2 陽的差分法の公式

熱伝導方程式 (5.6) に対し、左辺に前進差分、右辺に中心差分を適用すると、次の式が得られる。

$$\frac{U(\tau + \Delta\tau, x) - U(\tau, x)}{\Delta\tau} = \frac{U(\tau, x + \Delta x) - 2U(\tau, x) + U(\tau, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}\quad (5.14)$$

いま、第 (i, j) 番目の格子点を $(\tau_i, x_j) = (i\Delta\tau, j\Delta x)$ とし、そこでの U の値を $U_{i,j}$ と書くと、この式は次のように書き直せる。

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta\tau} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta x)^2}\quad (5.15)$$

さらに,

$$r = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\quad (5.16)$$

とおき、左辺に時刻 τ_{i+1} の項、右辺に時刻 τ_i の項が来るように整理すると、

$$U_{i+1,j} = rU_{i,j+1} + (1 - 2r)U_{i,j} + rU_{i,j-1}\quad (5.17)$$

この式は、時刻 τ_i における3点での関数値 $U_{i,j-1}, U_{i,j}, U_{i,j+1}$ が与えられれば、それから時刻 τ_{i+1} における関数値 $U_{i+1,j}$ が計算できることを示している (図 5.4)。このようにして、初期値から始めて時刻 $\tau_1, \tau_2, \dots$ での関数値を次々に計算していく方法を**陽的差分法**または**陽解法**と呼ぶ。

5.2.3 計算例

陽的差分法を用いてヨーロピアン・コールオプションの価格を計算した例を図 5.5 に示す。ここで、 $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $K = 100$ であり、初期資産価格 S_0 の関数としての価格を複数の満期 $T = 0$, $T = 0.5$, $T = 1.0$ に対してプロットした¹。なお、 $x_{\max} = -x_{\min} = 5.0$ とし、時間方向の分割数を 150、空

¹陽的差分法の計算を実行すると、最終的に $\tau = \frac{1}{5}\sigma^2 T$, $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ における U の値が得られる。これは、元の変数に戻すと、 $t = 0$ で様々な S_0 の値に対するオプション価格 V が得られたことに相当する。

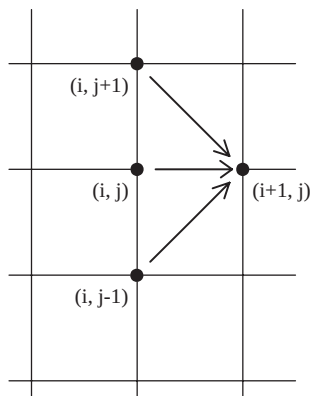


図 5.4: 陽的差分法における計算

間 (x) 方向の正の部分の分割数を 200 (負の部分も同じ) とした。このとき,

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 1/150 = 3 \times 10^{-4} \\ \Delta x &= x_{\max}/200 = 2.5 \times 10^{-2}\end{aligned}\quad (5.18)$$

である。

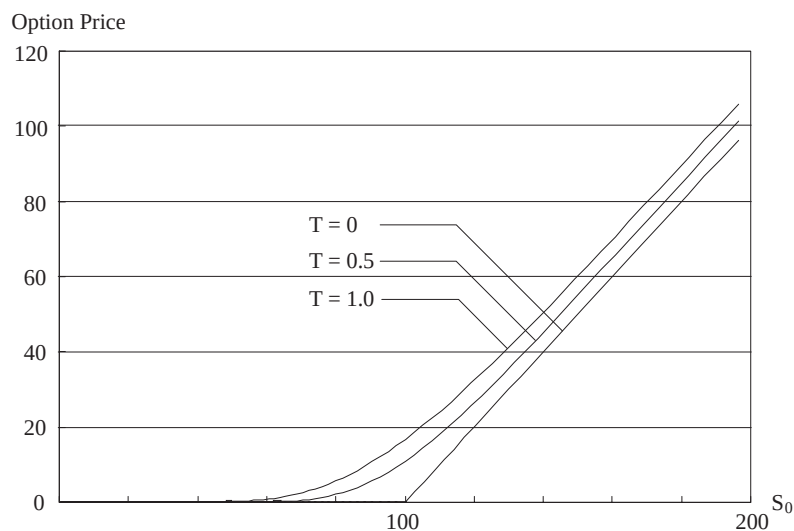


図 5.5: 陽的差分法により計算したコールオプション価格 (1)

計算結果は、たとえば $T = 1.0$ で $S_0 = 100$ のとき、 $V = 16.72971$ となる。一方、ブラック-ショールズ公式によるこの場合の解析解は $V = 16.73411$ であり、比較的正確な価格が得られていることがわかる。

次に、同じ条件で空間方向の正の部分の分割数のみを210に増やして計算を行った結果を図5.6に示す。このとき、

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= 3 \times 10^{-4} \\ \Delta x &= x_{\max}/210 = 2.381 \times 10^{-2}\end{aligned}\quad (5.19)$$

である。

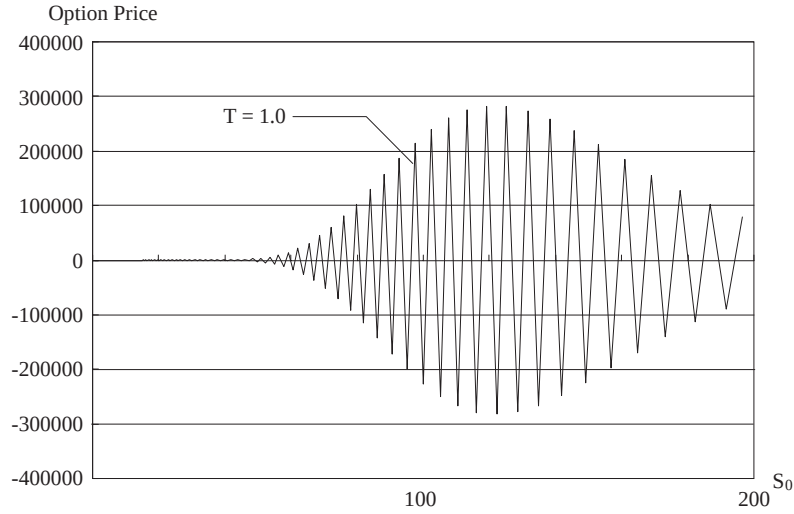


図 5.6: 陽的差分法により計算したコールオプション価格 (2)

本来なら分割数を増すことで、結果はより正確になると考えられるが、図5.6を見ると、値が極端に大きく、かつ正負に振動するめっちゃめっちゃな解になってしまっている。このような現象はどうして起きるのだろうか。

5.2.4 陽的差分法の安定性解析

実は陽的差分法では、計算が正しく行われるために $\Delta\tau$ 、 Δx が満たすべきある関係式があり、これが満たされないと、解の絶対値が時間ステップと共に指数関数的に増大し、図5.6のように真の解からかけ離れた解になってしまうことが知られている。これを陽的差分法の**不安定性**と呼ぶ。

この現象を解析するため、まず陽的差分法の公式 (5.17) を行列形式で書いてみよう。 $x_{\max} = j_{\max}\Delta x$ 、 $x_{\min} = j_{\min}\Delta x$ とし、 $j = j_{\min}, j_{\min}+1, \dots, j_{\max}$

に対する式をまとめて書くと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} U_{i+1,j_{\min}+1} \\ U_{i+1,j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i+1,j_{\max}-2} \\ U_{i+1,j_{\max}-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i,j_{\min}+1} \\ U_{i,j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i,j_{\max}-2} \\ U_{i,j_{\max}-1} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} U_{i,j_{\min}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{i,j_{\max}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

ここで、 $U_{i,j_{\min}}$ 、 $U_{i,j_{\max}}$ は境界条件により与えられるため、定数ベクトルとして右辺第2項に置いた。この式は次のように書き直せる。

$$\mathbf{U}_{i+1} = A\mathbf{U}_i + \mathbf{b}_i \tag{5.21}$$

これを繰り返し使うことにより、第 i ステップでの解ベクトル $\mathbf{U}_i$ は初期ベクトル $\mathbf{U}_0$ と境界条件ベクトル $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}$ を使って次のように表せる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_i &= A\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{b}_{i-1} \\
 &= A(A\mathbf{U}_{i-2} + \mathbf{b}_{i-2}) + \mathbf{b}_{i-1} \\
 &= \dots \\
 &= A^i\mathbf{U}_0 + (A^{i-1}\mathbf{b}_0 + A^{i-2}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_{i-1})
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

いま、 A の固有値を λ_l 、対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_l$ とすると、 A は実対称行列だから、 $\{\mathbf{v}_l\}$ は正規直交系をなし、 $\mathbf{U}_0$ は $\{\mathbf{v}_l\}$ で次のように展開できる。

$$\mathbf{U}_0 = \sum c_l \mathbf{v}_l \tag{5.23}$$

これより、

$$A^l \mathbf{U}_0 = \sum c_l \lambda_l^l \mathbf{v}_l \tag{5.24}$$

が成り立つ。

ここで、もし $\forall l |\lambda_l| < 1$ ならば、式(5.24)より、 i が進むにつれて、 $\mathbf{U}_i$ に対する初期値の影響は徐々に小さくなっていくことがわかる。これは、熱伝導方程式の初期値問題の解に対して期待される性質である。ところが、もし $\exists l |\lambda_l| > 1$ ならば、 $\mathbf{U}_0$ に含まれる $\mathbf{v}_l$ 成分は i につれて指数関数的に増大する。これは本来の熱伝導方程式の解にはない性質であり、これが不安定性をもたらす原因である。