

もし $\forall l |\lambda_l| \leq 1$ ならば、初期値 $\mathbf{U}_0$ に含まれる任意の固有ベクトルの成分は時間と共に減衰し（または一定の大きさを保ち）、指数関数的な増大は起らない。このとき、陽的差分法は**安定**であるという。そこで、 $\forall l |\lambda_l| \leq 1$ となるための条件を調べてみよう。それには次の補題を使う。

補題 $(M-1) \times (M-1)$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ & r & 1-2r & r & \\ & & & \ddots & \\ & & & r & 1-2r & r \\ & & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

と定義するとき、 A の固有値は

$$\lambda_l = 1 - 4r \sin^2 \frac{l\pi}{2M} \quad (l = 1, \dots, M-1) \quad (5.26)$$

となる。

この補題は λ_l に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{M-1})^t$ （上付きの t は転置を表す）とおき、固有方程式 $A\mathbf{v} = \lambda_l \mathbf{v}$ を $\{v_j\}_{j=1}^{M-1}$ に関する3項漸化式と見て解くことにより示せる。詳しくは <http://www.na.cse.nagoya-u.ac.jp/~yamamoto/lectures/appliedmathematics/torigoe2.PDF> の問題3を参照のこと²。

式 (5.26) より $\lambda_l < 1$ は明らかであるから、 $\lambda_l < -1$ となることがあるかどうかを調べればよい。 λ_l が最小となるのは $l = M-1$ のときで、このとき

$$\lambda_{M-1} = 1 - 4r \sin^2 \frac{(M-1)\pi}{2M} \simeq 1 - 4r \quad (5.27)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \text{陽的差分法が安定} &\Leftrightarrow A \text{ の固有値の絶対値がすべて } 1 \text{ 以下} \\ &\Leftrightarrow |\lambda_{M-1}| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - 4r \geq -1 \quad (\text{近似的に } \lambda_{M-1} = 1 - 4r \text{ とする。}) \\ &\Leftrightarrow r \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \Delta\tau \leq \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

となり、陽的差分法が安定であるための条件は $\Delta\tau \leq \frac{1}{2}(\Delta x)^2$ であることがわかる。

²この文書では少し違う形で固有値を求めているが、 $\cos$ の倍角の公式を使うことにより、式 (5.26) の形に直せる

この条件を図 5.5 と図 5.6 の例について調べてみると、正しく解が求まっている図 5.5 の場合は

$$\Delta\tau = 0.48 \times (\Delta x)^2 \quad (5.28)$$

で条件が満たされているのに対し、解の指数的大増大が起きている図 5.6 の場合は

$$\Delta\tau \simeq 0.53 \times (\Delta x)^2 \quad (5.29)$$

となって条件が満たされていない。したがって、この条件を使うことにより安定性を適切に判定できることがわかる。

5.2.5 陽的差分法の計算量と精度

陽的差分法において解の精度を上げるには、格子間隔 $\Delta\tau$, Δx を小さくする必要がある。ところが、もし $\Delta x \rightarrow \frac{1}{2}\Delta x$ とすると、式 (5.29) の条件より、 $\Delta\tau \rightarrow (\frac{1}{2})^2\Delta\tau$ とする必要がある。このとき、格子点数は $2 \times 4 = 8$ 倍になってしまう。このように陽的差分法では、計算量が Δx の 3 乗に反比例して増えるため、あまり精度を上げられないという問題点がある。

5.3 陰的差分法

5.3.1 陰的差分法の公式

陽的差分法の持つ不安定性を克服することのできる解法が、**陰的差分法**あるいは**陰解法**と呼ばれる解法である。

まず、 $U(\tau - \Delta\tau)$ の τ の周りでのテイラー展開を考えると、

$$U(\tau - \Delta\tau) = U(\tau) - \Delta\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(\Delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \cdots \quad (5.30)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{U(\tau) - U(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Delta\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \cdots \\ &= \frac{U(\tau) - U(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau) \end{aligned} \quad (5.31)$$

が成り立つ。この右辺第 1 項による $\frac{\partial U}{\partial \tau}$ の近似を**後退差分**による近似と呼ぶ。この近似の誤差は前進差分と同様、 $O(\Delta\tau)$ である。

陰的差分法では、第 $(i+1, j)$ 番目の格子点における熱伝導方程式 (5.6) を考え、左辺に後退差分、右辺に中心差分を適用する。その結果得られる式は次のようになる。

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta\tau} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} \quad (5.32)$$

式 (5.16) で定義される r を用いると、これは次のように書き直せる。

$$-rU_{i+1,j} + (1 + 2r)U_{i+1,j} - rU_{i+1,j-1} = U_{i,j} \quad (5.33)$$

この式は、陽的差分法の式 (5.17) とは逆に、時刻 τ_{i+1} における3点での関数値 $U_{i+1,j-1}, U_{i+1,j}, U_{i+1,j+1}$ と時刻 τ_i における1点での関数値 $U_{i,j}$ との関係式になっている (図 5.7)。式 (5.33) は $j = j_{\min} + 1, \dots, j_{\max} - 1$ に対して与えられるから、 $\{U_{i,j}\}$ がわかっているとき、これは $\{U_{i+1,j}\}$ に関する連立一次方程式となる。これを行列形式で書くと、次のようになる。

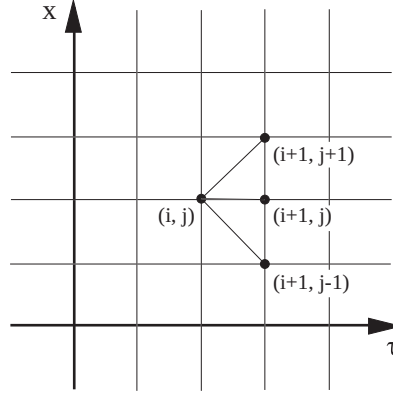


図 5.7: 陰的差分法における関係式

$$\begin{pmatrix} 1 + 2r & -r & 0 & & \\ -r & 1 + 2r & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & 1 + 2r & -r \\ & & & & -r & 1 + 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i+1,j_{\min}+1} \\ U_{i+1,j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i+1,j_{\max}-2} \\ U_{i+1,j_{\max}-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} U_{i,j_{\min}+1} \\ U_{i,j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i,j_{\max}-2} \\ U_{i,j_{\max}-1} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} U_{i+1,j_{\min}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{i+1,j_{\max}} \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

この式を

$$B\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \mathbf{b}_{i+1} \quad (5.35)$$

と書くと、陰的差分法では時間ステップを1つ進めるのに、 B を係数行列とする連立一次方程式を解く必要があることがわかる。

この連立一次方程式は、**ガウスの消去法**によって解くことができる。行列 B は**三重対角行列**（対角線とその上下のみに非ゼロ要素が存在する形の行列）であり、このことを利用するとガウスの消去法の演算量は $O(M)$ で済む。また、行列 B はどのタイムステップでも変わらないことを利用すると、**LU 分解**の技法を用いることで、さらに演算量を削減することができる³。

5.3.2 陰的差分法の安定性解析

式 (5.35) より,

$$\mathbf{U}_{i+1} = B^{-1}(\mathbf{U}_i + \mathbf{b}_{i+1}) \quad (5.36)$$

であり、これを繰り返し使うと,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i &= B^{-1}(\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{b}_i) \\ &= B^{-1}(B^{-1}(\mathbf{U}_{i-2} + \mathbf{b}_{i-1}) + \mathbf{b}_i) \\ &= \dots \\ &= B^{-i}\mathbf{U}_0 + (B^{-i}\mathbf{b}_1 + B^{-i+1}\mathbf{b}_2 + \dots + B^{-1}\mathbf{b}_i) \end{aligned} \quad (5.37)$$

となる。したがって、陽的差分法の場合と同様に考えると、 B^{-1} の固有値を μ_l としたとき、 $\forall l, |\mu_l| \leq 1$ ならば陰的差分法は安定ということになる。

ところが,

$$B = -A + 2I \quad (I: \text{単位行列}) \quad (5.38)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \mu_l &= (-\lambda_l + 2)^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{l\pi}{2M}} \quad (l = 1, \dots, M-1) \end{aligned} \quad (5.39)$$

であり、明らかに、 $0 < \mu_l < 1$ となる。したがって、 $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ の値にかかわらず、陰的差分法は安定となる。これを **絶対安定**と呼ぶ。

5.3.3 計算例

図 5.6 と同じコールオプションの価格を陰的差分法により計算した結果を図 5.8 に示す。ここで、 $x_{\max} = -x_{\min} = 5.0$ 、時間方向の分割数は 150、 x 軸の正の部分の分割数は 400 であり、

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 1/150 = 3 \times 10^{-4} \\ \Delta x &= x_{\max}/400 = 1.25 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

³ガウスの消去法およびその三重対角行列への適用については、たとえば <http://www.na.cse.nagoya-u.ac.jp/~yamamoto/lectures/appliedmathematics/chapter9.PDF> を参照のこと。ここには LU 分解に関しても説明がある。

となっている。このとき、

$$\Delta\tau = 1.92 \times (\Delta x)^2 \quad (5.41)$$

であり、陽的差分法の安定性の条件は満たされていないが、陰的差分法では、図5.8の通り、全く問題なく解が求まっている。

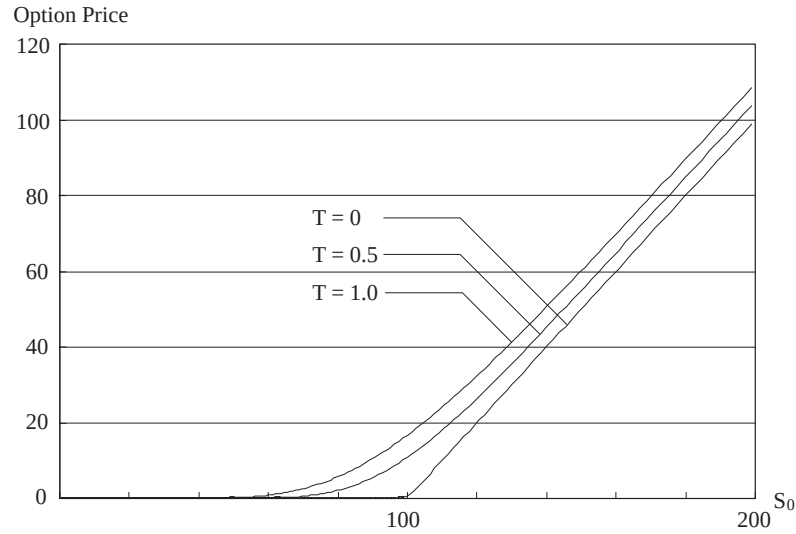


図 5.8: 陰的差分法により計算したコールオプション価格

5.4 クランク-ニコルソン法

5.4.1 クランク-ニコルソン法の公式

陽的差分法、陰的差分法では、ともに空間方向の2階微分の近似に中心差分を用いており、その誤差は $O((\Delta x)^2)$ (2次精度) である。一方、時間方向の1階微分の近似には前進差分または後退差分を用いるが、その誤差はともに $O(\Delta\tau)$ (1次精度) である。したがって、これらの解法では時間方向の差分近似による誤差が大きく、空間方向の差分近似の精度の高さを活かさないという問題点がある。そこで、時間方向も2次精度とするために考案された解法が**クランク-ニコルソン法**である。

クランク-ニコルソン法では第 $(i + \frac{1}{2}, j)$ 番目の格子点⁴における熱伝導方程式 (5.6) を考え、両辺に差分近似を適用する。

⁴実際にはこの点には格子点はなく、第 (i, j) 番目の格子点と第 $(i + 1, j)$ 番目の格子点との中点を考えるという意味である。

まず、時間方向については、 U_τ および $U_{\tau+\Delta\tau}$ を $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$ の周りで展開すると、

$$\begin{aligned} U_{\tau+\Delta\tau} &= U_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left(\frac{1}{2}\Delta\tau \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left(\frac{1}{2}\Delta\tau \right)^2 + O((\Delta\tau)^3) \\ U_\tau &= U_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} - \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left(\frac{1}{2}\Delta\tau \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left(\frac{1}{2}\Delta\tau \right)^2 + O((\Delta\tau)^3) \end{aligned} \quad (5.42)$$

これらより、

$$\frac{U_{\tau+\Delta\tau} - U_\tau}{\Delta\tau} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} + O((\Delta\tau)^2) \quad (5.43)$$

となり、時間方向の差分を2次精度にすることができた。

一方、空間方向の差分については、時刻 $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$ に格子点がないため、中心差分の式 (5.13) を直接この点に対して適用することはできない。そこで、点 (i, j) における中心差分の式と点 $(i+1, j)$ における中心差分の式との平均を取ることで、点 $(i + \frac{1}{2}, j)$ での中心差分の式の近似とする⁵ (図 5.9)。

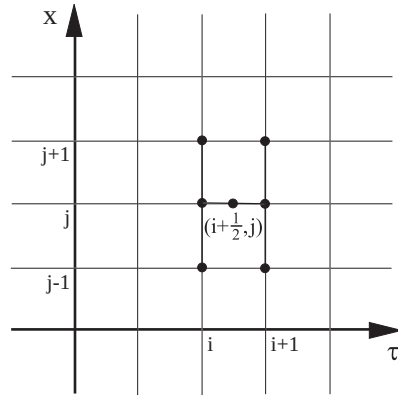


図 5.9: クランク-ニコルソン法における計算

以上より、クランク-ニコルソン法の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta\tau} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

⁵ この近似による誤差は $O((\Delta\tau)^2(\Delta x)^2)$ であり、左辺および右辺の中心差分そのものの誤差に比べて無視できる。

$r = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$ を使って表すと,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}rU_{i+1,j+1} + (1+r)U_{i+1,j} - \frac{1}{2}rU_{i+1,j-1} \\ & = \frac{1}{2}rU_{i,j+1} + (1-r)U_{i,j} + \frac{1}{2}U_{i,j-1} \end{aligned} \quad (5.45)$$

これは陰的差分法の場合と同様, U_{i+1} に関する連立一次方程式となっている。これを行列形式で表し, 陽的差分法の行列 A を使って書き直すと次のようになる。

$$\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) \mathbf{U}_{i+1} - \frac{1}{2}\mathbf{b}_{i+1} = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right) \mathbf{U}_i + \frac{1}{2}\mathbf{b}_i \quad (5.46)$$

クランク-ニコルソン法では, 時間ステップを1つ進めるために, $\mathbf{U}_{i+1}$ に関するこの連立一次方程式を解くことが必要である。

5.4.2 クランク-ニコルソン法の安定性解析

式 (5.46) より, クランク-ニコルソン法で $\mathbf{U}_{i+1}$ を求める式は

$$\mathbf{U}_{i+1} = \underbrace{(3I - A)^{-1}(I + A)}_C \mathbf{U}_i + (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}) \quad (5.47)$$

となる。したがって陽的差分法, 陰的差分法の場合と同様, 安定性を調べるには行列 C の固有値を調べればよい。この固有値を ν_l とすると,

$$\begin{aligned} \nu_l &= \frac{1 + \lambda_l}{3 - \lambda_l} \\ &= \frac{1 - 2r \sin^2\left(\frac{l\pi}{2M}\right)}{1 + 2r \sin^2\left(\frac{l\pi}{2M}\right)} \quad (l = 1, \dots, M-1) \end{aligned} \quad (5.48)$$

ここで, 一般に2つの実数 a と b が共に正のとき,

$$\left| \frac{a-b}{a+b} \right| < 1 \quad (5.49)$$

であることを使うと,

$$|\nu_l| < 1 \quad (l = 1, \dots, M-1) \quad (5.50)$$

となることがわかる。したがって, クランク-ニコルソン法も絶対安定である。

5.4.3 計算例

図 5.5 と同じコールオプションで $S_0 = 100$, $T = 1.0$ の場合の価格を, 時間方向の分割方向 M , x 方向の正の部分の分割数 N を変えて陰的差分法, ク

ランク-ニコルソン法の両方で計算した結果を図5.10に示す。ここで、 M は5から640まで2倍ずつ変化させ、 $N = 10M$ とした。また、ブラック-ショールズ公式により解析的に求めた価格は16.734108であり、図の縦軸はこの価格からのずれを表す。

図より、陰的差分法は直線の傾きが約 -1 なので1次精度であることがわかる。また、クランク-ニコルソン法は直線の傾きが約 -2 であり、予想通り2次精度となっていることがわかる。

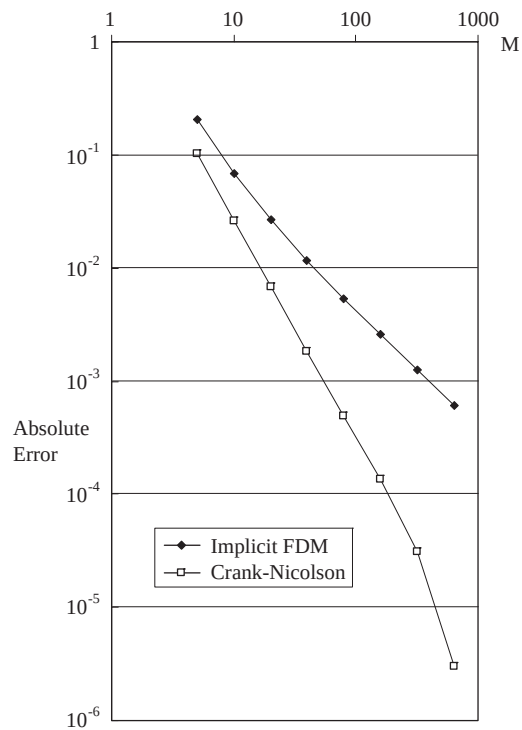


図 5.10: 陰的差分法とクランク-ニコルソン法の精度比較