

2006年度 応用数理工学特論 第2回レポート課題

- 2006年7月21日(金)までに提出してください。
- 提出はできるだけメールで, yamamoto@na.cse.nagoya-u.ac.jp までお願いします。紙の場合は, 工学部3号館北305号室に提出してください。
- レポートには氏名と学籍番号を記入してください。

問題1

n 次ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ が与えられたとき,

$$\begin{aligned}\sigma &= \|\mathbf{a}\|_2 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a} + \text{sgn}(a_1)\sigma \mathbf{e}_1 = (a_1 + \text{sgn}(a_1)\sigma, a_2, \dots, a_n) \\ \alpha &= 2/\|\mathbf{u}\|_2^2\end{aligned}$$

(ただし $\|\mathbf{a}\|_2$ は \mathbf{a} のノルム, $\text{sgn}(x)$ は $x \geq 0$ のとき 1, それ以外のとき -1 を取る関数, \mathbf{e}_1 は第1要素だけが1で他が0の n 次ベクトル)として, $H = I - \alpha \mathbf{u} \mathbf{u}^t$ (I は単位行列)とおく。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) H は対称行列であることを示せ。
- (2) H は直交行列であることを示せ。
- (3) H はベクトル \mathbf{a} を第1要素のみ非ゼロで他が0のベクトルに変換すること, すなわち, あるスカラー c に対して $H\mathbf{a} = c, \mathbf{e}_1$ が成り立つことを示せ。

問題2

$n \times n$ 行列 A_0 とスカラー σ_1, σ_2 が与えられているとき, 次のように QR 法を2ステップ行って A_2 を計算する。

$$\begin{aligned}A_0 - \sigma_1 I &= Q_0 R_0 \\ A_1 &= R_0 Q_0 + \sigma_1 I \\ A_1 - \sigma_2 I &= Q_1 R_1 \\ A_2 &= R_1 Q_1 + \sigma_2 I\end{aligned}$$

一方, \bar{A}_2 を次のように計算する。

$$\begin{aligned}(A_0 - \sigma_1 I)(A_0 - \sigma_2 I) &= \bar{Q} \bar{R} \\ \bar{A}_2 &= \bar{Q}^{-1} A_0 \bar{Q}\end{aligned}$$

このとき, $\bar{A}_2 = A_2$, $\bar{Q} = Q_1 Q_2$ であることを示せ。ただし, 計算途中で出てくる行列はすべて正則であると仮定してよい。(ヒント: QR分解の一意性を用いよ。)