

特別講義 II(c)  
「計算ファイナンスの基礎」

山本有作<sup>1</sup>

October. 21, 2009



# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>オプションとは</b>	<b>7</b>
1.1	市場変動によるリスク	7
1.2	デリバティブによるリスク回避	8
1.2.1	デリバティブの種類	8
1.2.2	オプションとは?	9
1.2.3	オプションから得られる利得	9
1.2.4	オプションの価格付け	10
1.3	様々なオプション	11
1.3.1	ヨーロピアンオプションとアメリカンオプション	11
1.3.2	経路依存型オプション	12
1.3.3	実際のオプション価格データ	15
1.4	簡単なモデルによるオプション価格計算	15
1.4.1	1 期間 2 項モデル	15
1.4.2	オプション価格計算の原理	17
1.4.3	リスク中立確率	18
<b>第 2 章</b>	<b>確率論の基礎</b>	<b>21</b>
2.1	ブラウン運動	21
2.1.1	ブラウン運動の定義	21
2.1.2	ブラウン運動の性質	21
2.1.3	ブラウン運動のシミュレーション	23
2.1.4	ブラウン運動から生成される確率過程	25
<b>第 3 章</b>	<b>ブラック-ショールズの資産価格モデル</b>	<b>29</b>
3.1	資産価格のモデル化	29
3.1.1	安全資産のモデル	29
3.1.2	危険資産のモデル	30
3.2	伊藤の公式	31
3.3	資産価格の解	32
3.4	資産価格のシミュレーション	33

<b>第 4 章</b>	<b>ブラック-ショールズの偏微分方程式</b>	<b>35</b>
4.1	ブラック-ショールズの偏微分方程式	35
4.1.1	ブラック-ショールズの偏微分方程式の導出	35
4.1.2	初期条件と境界条件	36
4.2	ブラック-ショールズのオプション価格公式	37
4.2.1	熱伝導方程式への変形	37
4.2.2	熱伝導方程式の基本解と重ね合わせの原理	39
4.2.3	ブラック-ショールズのオプション価格公式	40
4.2.4	オプション価格の計算例	42
4.3	プット・コール・パリティ	42
<b>第 5 章</b>	<b>差分法によるオプション価格計算</b>	<b>43</b>
5.1	問題設定	43
5.2	陽的差分法	45
5.2.1	差分による微分の近似	45
5.2.2	陽的差分法の公式	46
5.2.3	計算例	46
5.2.4	陽的差分法の安定性解析	48
5.2.5	陽的差分法の計算量と精度	51
5.3	陰的差分法	51
5.3.1	陰的差分法の公式	51
5.3.2	陰的差分法の安定性解析	53
5.3.3	計算例	53
5.4	クランク-ニコルソン法	54
5.4.1	クランク-ニコルソン法の公式	54
5.4.2	クランク-ニコルソン法の安定性解析	56
5.4.3	計算例	56

## 目次

1.1	プットオプションのペイオフ	10
1.2	コールオプションのペイオフ	11
1.3	アメリカンオプション	12
1.4	バリアオプション	13
1.5	ルックバックコールオプション	13
1.6	アジアンオプション	14
1.7	1 期間 2 項モデル ( 株価 )	16
1.8	1 期間 2 項モデル ( 安全資産 )	16
1.9	1 期間 2 項モデル ( オプション )	17
2.1	ブラウン運動のマルチンゲール性	22
2.2	ブラウン運動のサンプルパス	24
2.3	ドリフトを持つブラウン運動のサンプルパス	27
3.1	ドリフトを持つブラウン運動のサンプルパス	30
3.2	資産価格のサンプルパス ( $\mu = 0.05, \sigma = 0.2$ )	34
3.3	資産価格のサンプルパス ( $\mu = 0.2, \sigma = 0.3$ )	34
4.1	ブラック-ショールズ公式により計算したコールオプション価格	42
5.1	オプションの種類とペイオフ	44
5.2	初期値問題の解析領域	44
5.3	格子による解析領域の分割	45
5.4	陽的差分法における計算	47
5.5	陽的差分法により計算したコールオプション価格 (1)	47
5.6	陽的差分法により計算したコールオプション価格 (2)	48
5.7	陰的差分法における関係式	52
5.8	陰的差分法により計算したコールオプション価格	54
5.9	クランク-ニコルソン法における計算	55
5.10	陰的差分法とクランク-ニコルソン法の精度比較	57



# 第1章 オプションとは

本章では、本講義の主題となるデリバティブ、特にその一種であるオプションについて説明する。そのため、まず株式、為替などの市場変動により企業や投資家がどのようなリスクを被るかを示し、そのリスクを回避するための金融商品としてオプションを導入する。次に、オプションの価格付けと呼ばれる問題を紹介し、簡単なモデルを使って価格付けの原理を学ぶ。

## 1.1 市場変動によるリスク

**企業の経済活動と金融市場** 企業が経済活動を行うに当たっては、株式、為替、金利などの金融市場が大きな役割を果たす。たとえば製造業の会社は設備投資を行うため、株式を発行したり銀行から借入れを行ったりして資金を調達する。また、原材料を外国から輸入する場合は為替市場により円と他国通貨との両替を行う。一方、保険会社や投資信託会社は顧客から預かったお金を株式、国債などに投資し、資産運用を行う。

しかし、これら株式、為替レート、金利などの市場は一般に時間とともに大きく変動し、それによるリスクが生じる。このリスクを回避するための商品がデリバティブ（金融派生証券）である。

**実際の市場変動のデータ** デリバティブについて説明する前に、まず実際の市場変動のデータを見てみよう。ここでは、株価のデータ2つと為替のデータ1つを示す（実際のグラフについては第1回授業のパワーポイントを参照）。

- 株価の例1： IBM, 2002年4月～2004年4月のデータ。
- 株価の例2： トヨタ, 2002年4月～2004年4月のデータ。
- 為替の例： ドル/円の為替レート。2003年4月～2004年4月のデータ。

なお、これらのデータは以下のサイトから無料で入手できる。

- Financial Times : <http://news.ft.com/markets/equities>
- Yahoo! Finance : <http://finance.yahoo.com>

- 朝日新聞(経済 為替欄) <http://www.asahi.com/business/exchange.html>

これらのグラフはそれぞれ全く違った動きをしているが、データとしては似た性質を持っている。たとえば、極めて不規則な細かい動きをすること、時には急激な値下がり、値上がりがあること、過去の動きから将来の動きを予測することが非常に難しそうであること、などである。

市場変動によるリスク このような市場変動により生じるリスクの例を2つ挙げてみよう。

- (1) トヨタの株を1株\$40で購入した。1年後には株価がさらに上がると見込んでおり、その時点で売却して利益を得るつもりである。しかし、万が一その時点で株価が暴落していたら、大損してしまう。
- (2) ある製造業の会社では、3ヵ月後に原材料をアメリカから輸入して製品を作る計画を立てている。購入代金はその時点までに用意するつもりであり、予算は\$1=90円として組んでいる。しかし、万が一3ヵ月後の時点で円が大きく下がっていると、赤字になってしまう。

デリバティブを使うと、このようなリスクを回避することができる。

## 1.2 デリバティブによるリスク回避

### 1.2.1 デリバティブの種類

デリバティブには様々な種類があるが、ここではそのうちの主な4つを紹介する。

デリバティブ の種類	オプション … 将来のある時点で、資産を予め決められた価格で売買する権利。 行使するかは自由。《契約より有利》
	先物 (future) … 将来のある時点で、資産を予め決められた価格で売買する <u>契約</u> 。
	先渡し (forward) … 先物取引と対象は同じ。 ただし、相対(あいたい)取引であり、取引上の制約は緩やか。
	スワップ … 同一通貨の金利を交換、異種の通貨を金利ごと交換する。

この講義では、これらのデリバティブのうち、主に『オプション』を対象にする。

### 1.2.2 オプションとは？

オプションには、『売却する権利』と『購入する権利』の2種類があり、それぞれプットオプション、コールオプションと呼ばれる。オプションを利用すると、前節で述べたような市場変動によるリスクをたとえば次のようにして回避できる。

- (1) トヨタの株に加えて、1年後にその株を\$45で売る権利(プットオプション)を持っていたとする。すると、万一1年後に株が暴落した場合でも権利を行使することにより株を\$45で売ることができ、損失は最小限に抑えられる。もし予想通り株価が上がっていたら、権利は行使せずに市場で株を売却すればよい。
- (2) 3ヵ月後に1ドルを90円で買う権利(コールオプション)を持っていたとすると、3ヵ月後にドルが高騰した場合でも予定の予算でドルを買うことができ、赤字を出さずにすむ。もし1ドルが90円よりも安ければ、権利を放棄して市場で購入すればよい。

オプションを定義するパラメータとしては、対象となる資産(株式、為替など)、現在の資産価格、行使価格(売買する価格)、満期(資産の売買が行われる日時)、オプションの種別(コールとプット)などがある。上の例でのパラメータは次のようになる。

{	対象となる資産	トヨタの株	ドル
	現在の資産価格 $S_0$	\$40	90円
	行使価格 $K$	\$45	90円
	満期 $T$	1年後	3ヵ月後
	オプションの種別	プットオプション	コールオプション

### 1.2.3 オプションから得られる利得

いま、時刻  $t$  における資産価格を  $S_t$  と書くことにする。すると、オプションを持つことにより得られる満期での利得(ペイオフと呼ぶ)は次のようになる。

プットオプションの場合

$$\begin{cases} S_T \geq K \implies \text{市場で売却したほうが利益が大きい。} \implies \text{利益 } 0 \\ S_T < K \implies \text{権利を行使、相手に\$45で売る。} \implies \text{利益 } K - S_T \end{cases}$$

なお、 $S_T \geq K$  の場合でも  $S_0 < S_T$  ならば株の値上がりにより  $S_T - S_0$  だけの利益があるように思うかもしれないが、これはたとえプットオプションを持っていなかったとしても得られる利益なので、オプションを持つことによる追加の利益は0である。 $S_T < K$  の場合の利得も同様に考える。

以上の2つの場合をまとめると、プットオプションのペイオフは

$$\max(K - S_T, 0) \quad (1.1)$$

と書ける。 $S_T$  の関数として見たペイオフのグラフを図 1.1 に示す。

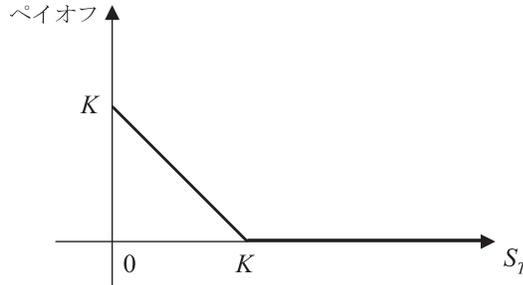


図 1.1: プットオプションのペイオフ

コールオプションの場合 プットオプションの場合と同様に考えると、満期時点でオプションから得られる利得は次のようになる。

$$\begin{cases} S_T > K \implies \text{権利を行使, 相手から } 90 \text{ 円で買う。} \implies \text{利益 } S_T - K \\ S_T \leq K \implies \text{市場で購入したほうが利益が大きい。} \implies \text{利益 } 0 \end{cases}$$

これらをまとめて、コールオプションのペイオフは次式のようなになる。

$$\max(S_T - K, 0) \quad (1.2)$$

コールオプションのペイオフのグラフを図 1.2 に示す。

#### 1.2.4 オプションの価格付け

式 (1.1), (1.2) より、プットの場合でもコールの場合でも、オプションの権利の持ち手は満期において必ず 0 以上の利益を得ることがわかる。この利益はそのまま相手側の損失となるので、相手側は必ず 0 以上の損失を被ることになり、このままでは誰もオプション契約の相手方となる人はいない。つまり、オプションの権利を手に入れるにはそれなりの代価、対価を支払う必要がある。

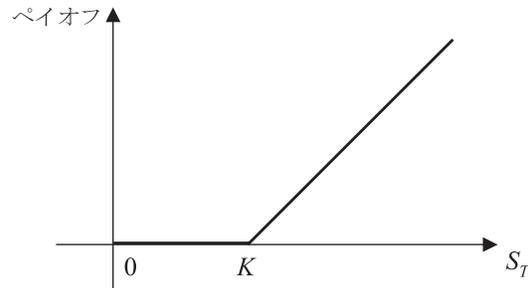


図 1.2: コールオプションのペイオフ

そこで、権利の買い手は権利の売り手に時刻  $t = 0$  で代価を支払い、売り手側はこの代価が後で被るリスクに対して妥当であると判断すれば、権利を売る。

⇒ この代価を オプションの価格 と呼ぶ。

この『オプションの価格をどう定めれば経済学的に合理的か』(両者が納得するか)ということが重要になる。

⇒ これを オプションの価格付け問題 という。

オプションの価格付け問題が本講義の主要なテーマである。

## 1.3 様々なオプション

### 1.3.1 ヨーロピアンオプションとアメリカンオプション

**ヨーロピアンオプション** 前節で述べたオプションは、満期  $T$  でのみ権利行使が可能であった。このようなオプションをヨーロピアンオプションと呼ぶ。ヨーロピアンオプションについては、ブラック-ショールズ公式と呼ばれる解析的な式により価格を計算することが可能である。これについては第5章で扱う。

**アメリカンオプション** 一方、 $0 \leq t \leq T$  の任意の時点で権利行使可能なオプションもあり、アメリカンオプションと呼ばれる。いま、ある株式に対する行使価格  $K$  のプットオプションを持っている人がいて、時刻  $t$  ( $0 < t < T$ ) における株価が  $K$  を下回っていると仮定しよう。更に、株価はこれから上昇し、満期  $T$  では  $K$  を大きく超えるだろうと予測したとする(図 1.3 参照)。この場合、持っているオプションがヨーロピアンオプションであれば、満期  $T$  ではオプションが無価値になる(市場で売ったほうが高いから)と予測しつつも、何もすることができない。一方、アメリカンオプションであれば、時

刻  $t$  で権利行使をすることにより、その時点で  $K - S_t$  の利得を得ることができる。

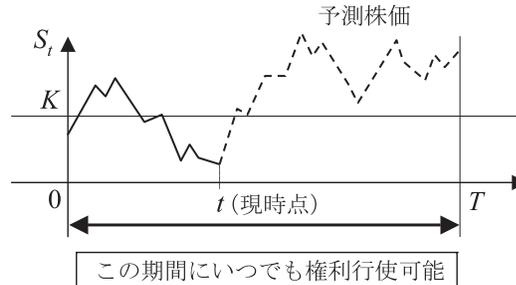


図 1.3: アメリカンオプション

アメリカンオプションではこのような行使時期の自由度があり、その分利得を得られる可能性も高くなるので、オプション価格はヨーロピアンオプションに比べて当然高くなる。また、自由度が高い分だけ価格計算も複雑となり、解析的な式で価格を計算することは一般にできない。そのため、数値計算が重要になる。

### 1.3.2 経路依存型オプション

前節で述べたオプションでは、オプションのペイオフは満期  $T$  における資産価格  $S_T$  にのみ依存し、途中の資産価格  $S_t$  ( $0 < t < T$ ) には依存しなかった。しかし、市場で取引されるオプションの中には、ペイオフが途中の資産価格に依存して決まるオプションもある。これらを経路依存型オプションと呼ぶ。よく知られた経路依存型オプションとしては、バリアオプション、ルックバックオプション、アジアンオプションなどが挙げられる。

**バリアオプション** 通常のヨーロピアンオプションとほとんど同じだが、資産価格にバリアと呼ばれるあるレベル  $H$  が設定され、 $0 \leq t \leq T$  のどこかの時点で  $S_t$  が  $H$  を越えた場合に契約が無効になるオプションをバリアオプションと呼ぶ(図 1.4 参照)<sup>1</sup>。

オプションの売り手側からすると、コールオプションを売ることによる損失は理論上はいくらでも大きくなりうる(株価は理論上はいくらでも上がりうる)が、バリアを設けることで、株価がバリアを越えた場合に契約を無効にすることができ、損失に上限を設けられるというメリットがある。そのため、バリアオプションの価格はバリアのないヨーロピアンオプションに比べて安くなる。

<sup>1</sup>正確には、 $S_t$  が  $H$  を下回った場合に契約が無効になるもの、 $H$  を越えた場合に初めて契約の効力が発生するものなど、様々な変種がある。

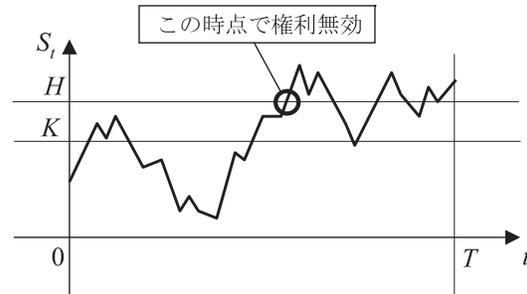


図 1.4: バリアオプション

バリアオプションの価格を計算する式は、解析的に求められている<sup>2</sup>。しかし、バリア越えの観測を連続時間 ( $0 \leq t \leq T$ ) でなく離散時点 (たとえば週に1回) のみで行うなど、問題の設定を少し変えると解析解が使えなくなり、数値計算が必要となる。

**ルックバックオプション** 満期において、 $0 \leq t \leq T$  における資産価格の最安値で資産を購入できる権利をルックバックコールオプションと呼ぶ (図 1.5 参照)<sup>3</sup>。このオプションの満期におけるペイオフは、行使価格が  $\max_{0 \leq t \leq T} S_t$  であるとみなせることより、

$$S_T - \max_{0 \leq t \leq T} S_t \quad (1.3)$$

と書ける。一方、 $0 \leq t \leq T$  における資産価格の最高値で資産を売却できる権利をルックバックプットオプションと呼ぶ。

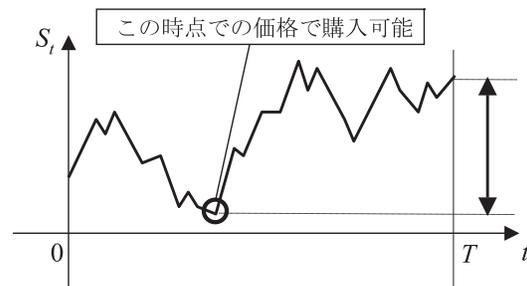


図 1.5: ルックバックコールオプション

ルックバックオプションを持つと、資産売買のタイミングについて悩むことなく、もっとも有利な条件で資産を売買できるというメリットがある。も

<sup>2</sup>資産価格がブラック-ショールズモデルに従う場合。

<sup>3</sup>正確には floating strike lookback option と呼ぶ。この他に、fixed strike lookback option というものもある。

もちろん、オプションの価格はそれに応じて高価になる。

ルックバックオプションの価格を計算する式は、解析的に求められている<sup>4</sup>。しかし、最安値/最高値の観測を連続時間 ( $0 \leq t \leq T$ ) でなく離散時点 (たとえば週に1回) のみで行うなど、問題の設定を少し変えると解析解が使えなくなり、数値計算が必要となる。

アジアンオプション 満期において、 $0 \leq t \leq T$  における資産価格の平均値で資産を売買できる権利をアジアンオプションと呼ぶ(図 1.6 参照)<sup>5</sup>。このオプションの満期におけるペイオフは、アジアンコールオプションの場合、

$$\max \left( S_T - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt, 0 \right) \quad (1.4)$$

と書ける。

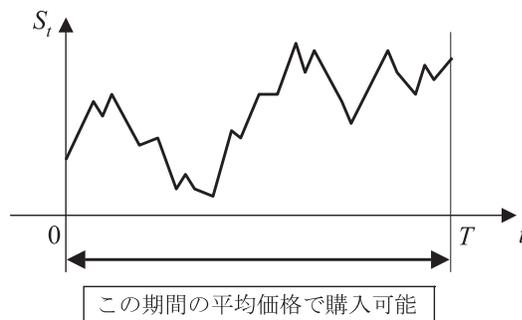


図 1.6: アジアンオプション

アジアンオプションを持つと、資産を売買するタイミングに影響されずに、安定した価格で売買を行えるというメリットがある。

アジアンオプションの価格を計算する解析的な式は求められていない。したがって、価格を求めるには数値計算が必要である。

経路依存型オプションとアメリカンオプションとの組み合わせ 以上で説明した3種類の経路依存型オプションは、いずれも満期時点でのみ権利行使が可能という意味でヨーロピアンタイプである。これに対して、満期までの任意の時点で権利行使が可能なアメリカンタイプの経路依存型オプションも存在する。たとえば、通常のアメリカーンオプションに、資産価格がバリアを越えると権利が無効になるという特徴を持たせたアメリカン・バリアオプション、満期までの任意の時点で権利行使ができ、その時点までの最安値(最高

<sup>4</sup>資産価格がブラック-ショールズモデルに従う場合。

<sup>5</sup>正確には floating strike Asian option または average strike option と呼ぶ。この他に、fixed strike Asian option というものもある。

値)で資産が購入(売却)できるアメリカン・ルックバックオプションなどが存在する。

### 1.3.3 実際のオプション価格データ

Chicago Board Options Exchange (CBOE) と呼ばれる米国のオプション市場で取引されている IBM 株に対するオプションの価格をしてみる(実際のデータはパワーポイント参照)。ここで示したオプションのパラメータは次の通りである。

- 現時点での株価  $S_0$  : \$93.04
- 行使価格  $K$  : \$45 から \$100 まで \$5 刻み
- 満期  $T$  : 2004 年 4 月
- オプションの種類 : コール(左側の欄)およびプット(右側の欄)

オプション価格を見ると, コールは行使価格が安いほど高く, プットは行使価格が高いほど高いことがわかる。また, コールにおいては行使価格とオプション価格との和(すなわちコールオプションを用いて1株を手に入れるのに必要な資金の合計)が現時点での株価に近い値になっている(行使価格が現時点での株価より低い場合)ことがわかる。これは, 満期までの時間が非常に短く, その間に株価の大きな変化はないであろうと多くの人々が予想していることの反映だと考えられる。

なお, オプション価格のデータは以下のサイトから無料で入手できる。

- CBOE : <http://quote.cboe.com/QuoteTable.asp>
- London International Futures and Options Exchange (LIFFE)  
<http://www.liffe-data.com/>

## 1.4 簡単なモデルによるオプション価格計算

### 1.4.1 1 期間 2 項モデル

オプションの価格付けがどのような原理で行われるかをまず知るため, 次のような簡単なモデルを考える。

- 時刻は現時点  $t = 0$  と満期  $t = T$  の 2 つだけを考える。
- 満期  $t = T$  において株価が取りうる値は 2 通りのみとする。

これを1期間2項モデルと呼ぶ。

$t = 0$ での株価を  $S$  とし、満期においては株価が確率  $q$  で  $u (> 1)$  倍に、確率  $1 - q$  で  $d (0 < d < 1)$  倍になると仮定すると、株価の動きは図1.7のように表せる。

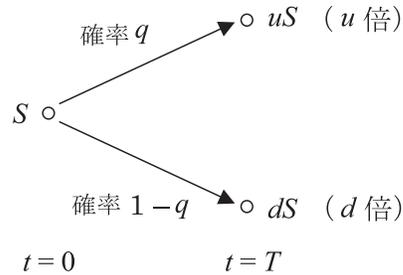


図 1.7: 1 期間 2 項モデル ( 株価 )

オプションの価格付けを行うにあたっては、実は株式に加え、安全資産と呼ばれる別の種類の資産が市場に存在すると仮定する必要がある。安全資産とは、時刻  $t = 0$  で価格が 1 であり、時刻  $t = T$  では価格が確実に  $1 + R$  ( $R > 0$ ) となるような資産である。安全資産の具体例としては銀行預金、国債などがある。いずれの場合でも、 $R$  は満期までの間の利息である。安全資産の価格の動きを株価の動きと同様に表すと、図 1.8 のようになる。

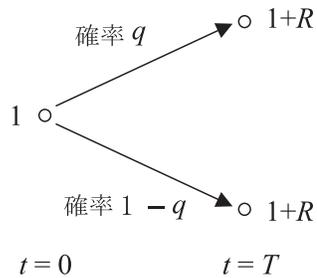


図 1.8: 1 期間 2 項モデル ( 安全資産 )

最後にオプションの価格の動きを考える。まず、時刻  $t = 0$  におけるオプション価格を  $C$  とする。満期時刻  $t = T$  においては、オプションの価値(すなわちペイオフ)は 1.2.3 節で述べたように株価に依存するので、2通りの値を取り得る。株価が上がったときのペイオフを  $C_u$ 、下がったときのペイオフを  $C_d$  とする。たとえばコールオプションの場合は

$$C_u = \max(uS - K, 0) \quad (1.5)$$

$$C_d = \max(dS - K, 0) \quad (1.6)$$

である。オプション価格の動きを図 1.9 に示す。

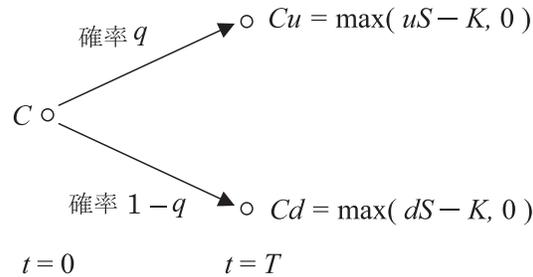


図 1.9: 1 期間 2 項モデル ( オプション )

### 1.4.2 オプション価格計算の原理

無裁定条件 上記のモデルの下でオプション価格  $C$  を計算するため、次の条件を仮定する。

- 現在の投資額がゼロ以下で、将来確実にプラスの利益を得る機会は存在しない。
- 現在の投資額がマイナスで、将来確実にゼロ以上の利益を得る機会は存在しない<sup>6</sup>。

これらを無裁定条件と呼ぶ。無裁定条件より、次のことが導かれる。

2つの資産の価格が  $t = T$  で等しいならば  $t = 0$  でも等しい。

これを示すため、2つの資産を  $A, B$ 、それぞれの  $t = T$  での価格を  $S_T^A, S_T^B$ 、 $t = 0$  での価格  $S_0^A, S_0^B$  として  $S_T^A = S_T^B$  かつ  $S_0^A > S_0^B$  だと仮定しよう。すると、時刻 0 で資産  $A$  を 1 単位空売り (自分の持っていない資産を売ったこととして相手から代金を受け取り、満期においてその資産を市場で購入して相手に渡すこと) して代金  $S_0^A$  を手に入れ、そのうち  $S_0^B$  を使って資産  $B$  を 1 単位購入し、残りの  $S_0^A - S_0^B (> 0)$  を銀行預金に回すことができる。時刻  $T$  では資産  $B$  を売却して代金  $S_T^B (= S_T^A)$  を受け取り、そのお金で資産  $A$  を 1 単位購入して空売りの相手に渡す。こうすると、 $t = 0$  での投資額が 0 なのに、 $t = T$  では預金した  $S_0^A - S_0^B$  の分だけ利益を得ることができる。これは無裁定条件に反する。したがって、 $S_T^A = S_T^B$  ならば  $S_0^A \leq S_0^B$  でなくてはならない。 $A$  と  $B$  を入れ替えて同じ議論を繰り返すことにより、 $S_0^A \geq S_0^B$  も言えて、結局、 $S_0^A = S_0^B$  となる。

複製ポートフォリオ 無裁定条件を使ってオプション価格を計算するため、株式と安全資産を組み合わせ、 $t = T$  でオプションと同じペイオフが得られる

<sup>6</sup>今野浩「金融工学の挑戦」, 中公新書, 2000. 参照。

ようにする。この組み合わせを複製ポートフォリオと呼ぶ<sup>7</sup>。複製ポートフォリオは  $t = T$  でオプションと同じ価値を持つから、 $t = 0$  でもオプションと同じ価値を持つ。したがって、 $t = 0$  での複製ポートフォリオの価値がオプション価格  $C$  となる。

複製ポートフォリオが株式  $x$  単位、安全資産  $y$  単位からなるとすると、 $t = T$  でこれがオプションと同じ価値を持つための条件は次のようになる。

$$t = T(\text{上昇}) : uSx + (1 + R)y = C_u, \quad (1.7)$$

$$t = T(\text{下降}) : dSx + (1 + R)y = C_d. \quad (1.8)$$

一方、 $t = 0$  で両者の価値が等しいという条件は次のようになる。

$$t = 0 : Sx + y = C, \quad (1.9)$$

式 (1.7), (1.8) より、

$$x = \frac{1}{S} \frac{C_u - C_d}{u - d}$$

$$y = -\frac{1}{1 + R} \frac{dC_u - uC_d}{u - d}.$$

これを式 (1.9) へ代入すると、

$$\begin{aligned} C &= xS + y \\ &= \frac{C_u - C_d}{u - d} - \frac{1}{1 + R} \frac{dC_u - uC_d}{u - d} \\ &= \frac{1 + R - d}{u - d} \frac{C_u}{1 + R} + \frac{u - (1 + R)}{u - d} \frac{C_d}{1 + R}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

となる。こうして、 $t = 0$  におけるオプション価格  $C$  が求められた。

### 1.4.3 リスク中立確率

1 期間 2 項モデルにおいては、無裁定条件が満たされている限り、株価の上昇率  $u$ 、下降率  $d$ 、安全資産の利益率  $1 + R$  の間に

$$d < 1 + R < u \quad (1.11)$$

が成り立つ。なぜなら、もし  $d > 1 + R$  だとすると、株価は下がった場合でも安全資産より高い利益を生むことになるため、 $t = 0$  において安全資産を  $S$  単位空売りして（すなわち銀行から  $S$  ドル借りて）その代金で株式を購入し、

<sup>7</sup>ポートフォリオ (Portfolio) とは、もともと「紙バサミ、書類入れ」という意味の言葉である。個々の機関や個人が保有する証券はそれぞれ「紙バサミ、書類入れ」で保管されていたことが多かったため、保有者ごとに保管した複数の証券を一つの資産として見なし、それをポートフォリオと呼ぶようになった。そして、現在では証券、不動産等も含めた金融資産を組み合わせできた資産全体をポートフォリオと呼ぶようになっている。

$t = T$  で株を売却して銀行に  $(1 + R)S$  ドルを返済すれば、初期投資ゼロで満期において正の利益が得られることになるからである。同様に、 $u < 1 + R$  と仮定しても、株式を空売りしてその代金を安全資産に投資する（すなわち銀行に預金する）ことにより、無裁定条件と反する結果が得られる。

このことより、式 (1.10) において

$$P_u = \frac{1 + R - d}{u - d}, \quad P_d = \frac{u - (1 + R)}{u - d} \quad (1.12)$$

とおくと、 $0 < P_u < 1$ ,  $0 < P_d < 1$  が成り立つ。更に、明らかに  $P_u + P_d = 1$  が成り立つ。そこで、 $P_u$ ,  $P_d$  を確率とみなしてリスク中立確率と呼ぶ。

この確率の下での期待値を  $E[\cdot]$  で表すと、式 (1.10) のオプション価格は

$$\begin{aligned} C &= P_u \frac{C_u}{1 + R} + P_d \frac{C_d}{1 + R} \\ &= E \left[ \frac{C_T}{1 + R} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

と書ける。ここで、 $C_T$  満期におけるオプションのペイオフであり、株価の上昇・下降に応じて  $C_u$  または  $C_d$  のどちらかの値を取る。また、期待値の中の  $1/(1 + R)$  という因子は、安全資産の時刻  $T$  での価格と時刻 0 での価格の比であるから、資産の時刻  $T$  での価値を時刻 0 での価値に換算する因子（割引率と呼ぶ）と考えることができる。そこで、式 (1.13) を言葉で表現すると次のようになる。

時刻  $t = 0$  におけるオプション価格は、満期におけるオプションペイオフに割引率を掛け、リスク中立確率の下での期待値を取ることによって求められる。

ここでは 1 期間 2 項モデルについてこの関係式を導いたが、実はこの計算法は後に述べるブラック-ショールズモデル、多期間 2 項モデルなど、より広い範囲のモデルに対して適用可能である。これについては、2 項モデルによる価格計算法、モンテカルロ法による価格計算法を扱う章で述べる。



## 第2章 確率論の基礎

本章ではいったんファイナンスの話題から離れ，次章で述べるブラック・ショールズの資産価格モデルの基礎となるブラウン運動について述べる。ただし，時間の制約から，数学的に厳密な議論は行わず，直感的な説明を行うに留める。

### 2.1 ブラウン運動

#### 2.1.1 ブラウン運動の定義

本節では，連続時間の確率過程であるブラウン運動を定義し，その性質を調べる。

連続時間の確率過程  $B_t$  は，次の4つの性質を満たすとき標準ブラウン運動またはウィーナー過程と呼ばれる。

- (i)  $B_0 = 0$
- (ii) 定常増分かつ独立増分を持つ。
- (iii) 各  $t > 0$  に対し， $B_t \sim N(0, t)$
- (iv) サンプルパスは連続

ブラウン運動は，物理や数学の様々な場面で現れる重要な確率過程である。次章で説明するブラック-ショールズの資産価格モデルも，ブラウン運動を元にして組み立てられている。

#### 2.1.2 ブラウン運動の性質

増分の分布  $s < t$  のとき， $B_t - B_s$  の分布を考えると，定常増分を持つことより，

$$B_t - B_s \text{ の分布} = B_{t-s} - B_0 \text{ の分布} = B_{t-s} \text{ の分布} = N(0, t-s) \quad (2.1)$$

これと性質 (ii) より，ブラウン運動は定常独立増分を持ち，増分は  $N(0, t-s)$  に従うことがわかる。

マルコフ性 ブラウン運動は独立増分を持つ過程であるから，マルコフ過程でもある。

マルチンゲール性  $u > t$  のとき  $B_u - B_t \sim N(0, u - t)$  であるから， $B_t = x$  のとき  $B_u \sim N(x, u - t)$  が成り立つ(図 2.1 参照) したがって，

$$\begin{aligned} E[B_u | B_t = x] &= N(x, u - t) \text{ の期待値} \\ &= x \end{aligned} \quad (2.2)$$

よって  $B_t$  はマルチンゲールである。

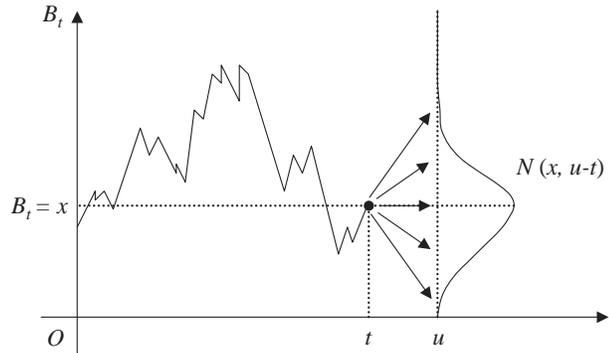


図 2.1: ブラウン運動のマルチンゲール性

微分不可能性 ブラウン運動のサンプルパスは連続であるが，至るところで微分不可能であることが知られている。ここではこれを証明する代わりに，直感的な議論により微係数

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \quad (2.3)$$

が存在しないことを示す。まず，定常増分を持つことより，

$$B_{t+h} - B_t \text{ の分布} = B_h \text{ の分布} = N(0, h) \quad (2.4)$$

したがって  $B_{t+h} - B_t$  の標準偏差は  $\sqrt{h}$  であるから， $B_{t+h} - B_t$  は  $O(\sqrt{h})$  程度の量である。よって，

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} = \frac{O(\sqrt{h})}{h} = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right) \rightarrow \infty \quad (h \rightarrow \infty) \quad (2.5)$$

これより，式 (2.3) の極限は存在しないと考えられる。

## 2.1.3 ブラウン運動のシミュレーション

ブラウン運動を近似する離散過程 区間  $[0, T]$  におけるブラウン運動  $B_t$  のサンプルパスをシミュレーションすることを考える。まず、計算機では連続的な時間は扱えないので、 $[0, T]$  を  $n$  等分し、離散的な時点

$$t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = T \quad (2.6)$$

のみを考える。ここで、 $h = T/n$  である。

ブラウン運動の性質より、 $i = 1, 2, \dots, n$  に対して  $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$  は独立で、 $N(0, h)$  に従う。そこで、 $B_t$  をシミュレーションするには、 $B_0 = 0$  から始めて 1 ステップごとに  $N(0, h)$  に従う独立な乱数を加えていけばよい。 $r_i \sim N(0, 1)$  のとき  $\sqrt{h}r_i \sim N(0, h)$  であるから、シミュレーションのアルゴリズムは次のようになる。

```

B0 = 0
do i=1, n
    N(0, 1) に従う乱数 ri を発生
    Bti = Bti-1 + √hri
end do

```

ここで、標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う乱数  $r_i$  は、区間  $(0, 1)$  の一様乱数  $u$  (これは例えば C 言語の rand 関数により生成できる) から次のようにして作ることができる。まず、標準正規分布の確率分布関数を  $F(x)$  とすると、

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2.7)$$

この  $F(x)$  の逆関数  $F^{-1}(x)$  を使い、 $r = F^{-1}(u)$  とすると、 $r$  は標準正規分布に従う。なぜなら、

$$P(r \leq x) = P(F^{-1}(u) \leq x) = P(u \leq F(x)) = F(x) \quad (2.8)$$

だからである。ここで、最後の等号では区間  $(0, 1)$  の一様乱数  $u$  と  $0 < c < 1$  を満たす実数  $c$  について成り立つ性質

$$P(u \leq c) = c \quad (2.9)$$

を用いた。この生成法を逆関数法と呼ぶ。なお、逆関数法では  $F^{-1}(x)$  の計算が必要となるが、この関数は解析的な式では書けない。そこで、 $F^{-1}(x)$  は近似式により計算するのが普通である。この近似法としては、Moro の方法<sup>1</sup>が精度が良いとされている。

<sup>1</sup>B. Moro: The Full Monte, *Risk*, Vol. 8 (Feb.), pp. 57-58 (1995) 参照。また、P. Glasserman: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, New York, 2004 にも説明がある。

本アルゴリズムにより生成したブラウン運動のサンプルパスを図 2.2 に示す。ただし,  $T = 1.0$ ,  $n = 1000$  である。 $B_t$  は極めて不規則に変動していることがわかる。

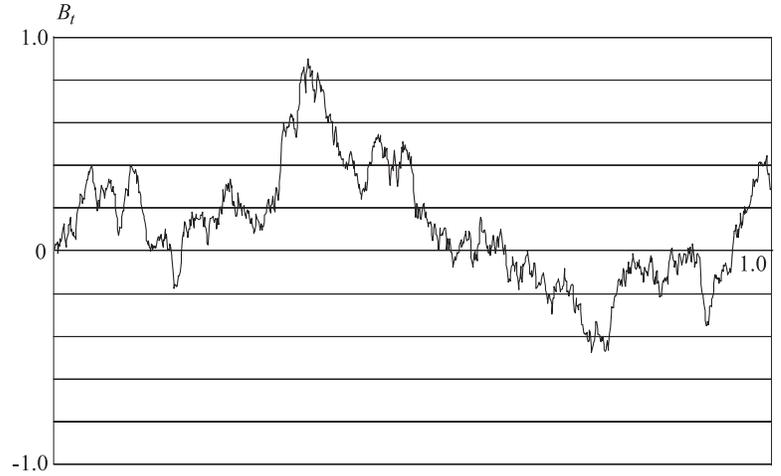


図 2.2: ブラウン運動のサンプルパス

離散過程の極限としてのブラウン運動 このアルゴリズムで生成される離散的な確率過程に対し,  $t_{i-1} < t < t_i$  のとき直線補間によって値を定義してできる連続的な確率過程を  $\bar{B}_t^{(n)}$  とすると,  $\bar{B}_t^{(n)}$  は  $n \rightarrow \infty$  のときブラウン運動に収束する<sup>2</sup>ことが知られている。そこで, ブラウン運動について考える場合は,  $\bar{B}_t^{(n)}$  の極限として考えると理解しやすい。たとえば次の通りである。

- $\bar{B}_t^{(n)}$  は各微小時間  $h$  ごとに正規分布  $N(0, h)$  に従う独立な確率変数を加え合わせてできる過程であるから, 時間  $t$  の間に加えられる確率変数の個数は約  $t/h$  となる。ここで, 正規分布に従う独立な確率変数の和の公式より, この和は  $N(0, \frac{t}{h} \cdot h) = N(0, t)$  に従うことがわかる。これより, ブラウン運動の定義 (iii) が導ける。
- 同様に,  $\bar{B}_t^{(n)} - \bar{B}_s^{(n)}$  は  $N(0, h)$  に従う独立な確率変数を  $(t-s)/h$  個加え合わせてできる確率変数であるから,  $N(0, t-s)$  に従う。これは  $t-s$  のみに依存するから,  $\bar{B}_t^{(n)}$  は定常増分を持つ。
- $t_1 < t_2 < \dots < t_m$  に対して  $\bar{B}_{t_2}^{(n)} - \bar{B}_{t_1}^{(n)}$ ,  $\bar{B}_{t_3}^{(n)} - \bar{B}_{t_2}^{(n)}$ ,  $\dots$ ,  $\bar{B}_{t_m}^{(n)} - \bar{B}_{t_{m-1}}^{(n)}$  を考えると,  $\bar{B}_{t_2}^{(n)} - \bar{B}_{t_1}^{(n)}$  を構成する  $(t_2 - t_1)/h$  個の確率変数,  $\bar{B}_{t_3}^{(n)} - \bar{B}_{t_2}^{(n)}$  を構成する  $(t_3 - t_2)/h$  個の確率変数,  $\dots$ ,  $\bar{B}_{t_m}^{(n)} - \bar{B}_{t_{m-1}}^{(n)}$  を構成する  $(t_m - t_{m-1})/h$  個の確率変数はすべて独立である。したがっ

<sup>2</sup>正確には法則収束する。

て、 $\bar{B}_{t_2}^{(n)} - \bar{B}_{t_1}^{(n)}, \bar{B}_{t_3}^{(n)} - \bar{B}_{t_2}^{(n)}, \dots, \bar{B}_{t_m}^{(n)} - \bar{B}_{t_{m-1}}^{(n)}$  も独立であり、 $\bar{B}_t^{(n)}$  は独立増分を持つ。

- 時刻  $t$  以後の過程  $\{\bar{B}_u^{(n)} | u > t\}$  を考える。 $\bar{B}_u^{(n)}$  は  $\bar{B}_t^{(n)}$  から出発し、正規分布  $N(0, h)$  に従う独立な確率変数を加え合わせてできる過程であるから、その分布は出発点での値  $\bar{B}_t^{(n)}$  のみに依存し、 $\bar{B}_t^{(n)}$  に到達するまでに辿ってきた経路には依存しない。したがって  $\bar{B}_t^{(n)}$  はマルコフ過程である。
- $\bar{B}_t^{(n)} = x$  とし、 $u > t$  における確率過程の値  $\bar{B}_u^{(n)}$  の分布を考える。 $\bar{B}_u^{(n)}$  は出発点での値  $\bar{B}_t^{(n)} = x$  に正規分布  $N(0, h)$  に従う独立な確率変数を  $(u-t)/h$  個加え合わせてできるから、出発点からの値のずれは  $N(0, u-t)$  に従う。したがって、その期待値は 0 であり、 $E[\bar{B}_u^{(n)} | \bar{B}_t^{(n)} = x] = x$  が成り立つ。すなわち、 $\bar{B}_t^{(n)}$  はマルチンゲールである。

以降の章でも、必要に応じて、ブラウン運動が  $\bar{B}_t^{(n)}$  の極限として与えられることを用いる。

#### 2.1.4 ブラウン運動から生成される確率過程

定義 ブラウン運動をもとにして、より複雑な確率過程を定義することができる。そのため、まず通常の微分方程式

$$\frac{dX_t}{dt} = a(t, X_t) \quad X_0 = x_0 \quad (2.10)$$

を考える。この微分方程式は、微小時間  $dt$  における  $X_t$  の変化が

$$dX_t = a(t, X_t)dt \quad (2.11)$$

により与えられることを示している。ここで、方程式の右辺に、ブラウン運動によるランダムなノイズの項を加えた式を考える。

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \quad (2.12)$$

ここで、 $dB_t$  は微小時間  $dt$  におけるブラウン運動の増分であり、 $N(0, dt)$  に従う確率変数である。右辺にこのランダムな項が入った結果、 $X_t$  も確率過程となり、その経路はブラウン運動のサンプルパスに対応して定まることになる。 $X_t$  をブラウン運動から生成される確率過程と呼び、この方程式を確率微分方程式と呼ぶ。

なお、上記の式の両辺を  $dt$  で割って確率微分方程式を

$$\frac{dX_t}{dt} = a(t, X_t) + b(t, X_t)\frac{dB_t}{dt} \quad (2.13)$$

と書くことはできない。これは、2.1.2 節で述べたように、ブラウン運動の微分  $\frac{dB_t}{dt}$  が存在しないからである。これに対して  $dB_t$  は、微小時間  $dt$  におけるブラウン運動の増分として正しく定義できる。

簡単な例 ブラウン運動から生成される確率過程のもっとも簡単な例として、次のように  $a(t, X_t)$ ,  $b(t, X_t)$  が定数の場合が考えられる。

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t \quad (\mu, \sigma \text{ は定数}) \quad (2.14)$$

この確率微分方程式は次のようにして簡単に解くことができる。まず、式(2.14)において  $dX_t$ ,  $dB_t$  はそれぞれ確率過程  $X_t$ ,  $B_t$  の微小時刻  $dt$  の間における増分であるから、この定義に従って式を書き直すと、

$$X_{t+dt} - X_t = \mu dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t) \quad (2.15)$$

ここで、式(2.15)に  $t = 0, dt, 2dt, \dots, t - dt$  を順に代入すると、

$$\begin{aligned} X_{dt} - X_0 &= \mu dt + \sigma(B_{dt} - B_0) \\ X_{2dt} - X_{dt} &= \mu dt + \sigma(B_{2dt} - B_{dt}) \\ &\vdots \\ X_t - X_{t-dt} &= \mu dt + \sigma(B_t - B_{t-dt}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

これらをすべて足し合わせて  $B_0 = 0$  に注意すると、

$$X_t - X_0 = \mu t + \sigma B_t \quad (2.17)$$

すなわち、

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t \quad (2.18)$$

こうして、確率微分方程式を解いて  $X_t$  を  $B_t$  の関数として陽に表すことができた。

式(2.18)から明らかなように、 $X_t$  は単調増加する確定的な成分  $\mu t$  とブラウン運動に比例する成分  $\sigma B_t$  とから成っている。この  $\mu$  をドリフトと呼ぶ。 $X_t$  をシミュレーションした結果を図 2.3 に示す。

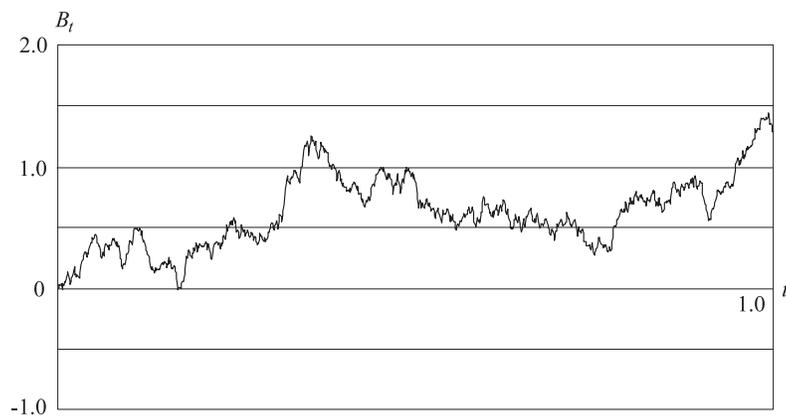


図 2.3: ドリフトを持つブラウン運動のサンプルパス



## 第3章 ブラック-ショールズの資産 価格モデル

本章では、時間が連続で価格も連続的に変化する場合の資産価格モデルを扱う。このようなモデルのうち、もっとも簡単なモデルがブラック-ショールズの資産価格モデルである。本章では、前章で学んだ確率過程の理論を基礎としてこのモデルを学ぶ。また、伊藤の公式を用いて資産価格をブラウン運動の関数として表す方法、資産価格のシミュレーションを行う方法についても議論する。

### 3.1 資産価格のモデル化

#### 3.1.1 安全資産のモデル

1.4節で考えたオプション価格計算のための簡単なモデルでは、株式の他に安全資産と呼ばれる利回りが確定した資産の存在を仮定した。ここでは連続時間でかつ価格が連続的に変化する場合に、安全資産のモデル化を考える。

まず、簡単なモデルでは、1円を安全資産に投資した(たとえば銀行に預けた)場合、1年後(満期を1年後とする)に $R$ 円の利子が付くと仮定した。これは元金+利子が1年後に不連続な変化をすることを意味するが、ここでは数学的な扱いやすさのため、連続的な変化をするモデルを考えたい。

そこで、1年を $n$ 等分し、各区間において区間の最初における元金の $\frac{r}{n}$ の利子が付くというモデルを考える。更に、付いた利子は直ちに元金に繰り入れることにする。すると、これは複利計算になるから元金は各区間ごとに $1 + \frac{r}{n}$ 倍に増え、1年の終わりには1円の元金は $(1 + \frac{r}{n})^n$ 円となる(図3.1)。

ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \rightarrow e^r \quad (3.1)$$

となる。したがって、

$$e^r = 1 + R \quad (3.2)$$

と $r$ を定めれば、連続的に利子が付き、かつ1年後の利子の合計が $R$ となるようなモデルが作れる。この $r$ を連続複利利率と呼ぶ。

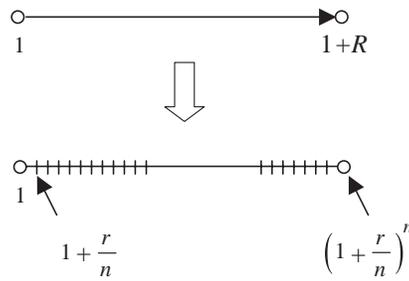


図 3.1: ドリフトを持つブラウン運動のサンプルパス

連続複利利率が  $r$  のとき，時刻 0 で  $M_0$  円を安全資産に投資したとすると，時刻  $t$  でのその価値は

$$M_t = M_0 e^{rt} \quad (3.3)$$

となる。したがって  $M_t$  の満たす微分方程式は

$$\frac{dM_t}{dt} = r M_0 e^{rt} = r M_t, \quad (3.4)$$

確率微分方程式と同様の形式で書くと

$$dM_t = r M_t dt \quad (3.5)$$

あるいは

$$\frac{dM_t}{M_t} = r dt \quad (3.6)$$

となる。一般に，式 (3.6) の左辺のように投資によって得られる収益を投資額で割った値を収益率と呼ぶ。式 (3.6) は安全資産の微小時間  $dt$  における収益率が  $r dt$  であることを示す。

### 3.1.2 危険資産のモデル

次に，株式，為替レートなど，価格が確率的に変動する危険資産のモデル化を考える。いま，危険資産の時刻  $t$  における価格を  $S_t$  とするとき，微小時間  $dt$  におけるその収益率は

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \frac{dS_t}{S_t} \quad (3.7)$$

である。この収益率を次のように 2 つの部分の和としてモデル化する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{確定的な部分} \quad \mu dt \\ \text{確率的な部分} \quad \sigma dB_t \end{array} \right. \quad (3.8)$$

このうち確定的な部分からは、安全資産と同様、収益率  $\mu dt$  で確実な収益が得られる。一方、確率的な部分からの収益はブラウン運動の増分  $dB_t$  により定義される。ブラウン運動の性質より  $dB_t \sim N(0, dt)$  であるから、確率的な部分からの収益率は  $N(0, \sigma^2 dt)$  に従う確率変数となる。これらを合わせて  $S_t$  の時間変化は

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \quad (3.9)$$

あるいは

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (3.10)$$

とモデル化される。このモデルをブラック-ショールズモデルと呼ぶ。

$\sigma$  は確率的な変動の激しさを表す量であり、ボラティリティと呼ばれる。一般に、安定した会社の株価は収益率は低いボラティリティも小さいため暴落などのリスクが小さく、一方、ベンチャー企業の株価は収益率は高いボラティリティも大きいリスクが大きい。このように、ブラック-ショールズモデルでは、様々な危険資産を収益率とボラティリティという2つのパラメータによって特徴付ける。

## 3.2 伊藤の公式

ブラック-ショールズモデルの下では、株価はどんな動きをするのだろうか。この疑問に答えるには、式 (3.10) の確率微分方程式を解き、株価を  $B_t$  の関数として表す必要がある。本節では、そのために用いる伊藤の公式について述べる。伊藤の公式は、次章でブラック-ショールズ方程式を導くにあたって重要な役割を果たす。

いま、確率微分方程式

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t \quad (3.11)$$

によって定義される確率過程  $X_t$  に対し、その関数  $f(t, X_t)$  を考える。ここで、関数  $f, a, b$  は十分滑らか、すなわち必要な回数だけ微分可能であるとする。このとき、微小時間  $dt$  における  $f(t, X_t)$  の変化  $df$  はテイラー展開により次のように書ける。

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} (dX_t)^2 + \dots \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} (a dt + b dB_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} (a^2 dt^2 + 2ab dt dB_t + b^2 dB_t^2) + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

いま,  $O(dt)$  までの項を考えることにすると,  $dt^2$  という因子を持つ項は消える。また,  $dB_t = O(\sqrt{dt})$  であるから,  $dt dB_t$  という因子を持つ項も消える。一方,  $dB_t^2 = O(\sqrt{dt}^2) = O(dt)$  であるから, この因子を持つ項は残る。この因子の期待値を計算すると,

$$\begin{aligned} E[(dB_t^2)] &= E[(dB_t)^2] - (E[dB_t])^2 \\ &= V[dB_t] \\ &= dt \end{aligned} \quad (3.13)$$

となるが, 詳しい数学的議論を行うと, 実は式 (3.12) において  $dB_t^2$  をこの期待値  $dt$  で置き換えてよいことがわかる<sup>1</sup>。そこで, 式 (3.12) でこの置き換えを行い,  $dt$  の1次までの項を取って整理すると次のようになる。

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} a(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} (b(t, X_t))^2 \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} b(t, X_t) dB_t \quad (3.14)$$

これを伊藤の公式と呼ぶ。

### 3.3 資産価格の解

伊藤の公式を利用すると, 式 (3.10) の確率微分方程式を解くことができる。いま,  $S_t$  の関数  $x_t = \log S_t$  を考えて伊藤の公式を適用すると,

$$\begin{aligned} dx_t &= \left\{ \frac{\partial(\log S_t)}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\log S_t)}{\partial S_t^2} \right\} dt + \frac{\partial(\log S_t)}{\partial S_t} \sigma S_t dB_t \\ &= \left\{ \frac{1}{S} \mu S_t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma S_t)^2 \right\} dt + \frac{1}{S} \sigma S_t dB_t \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t \end{aligned} \quad (3.15)$$

よって  $x_t$  は定数係数の確率微分方程式を満たす。これは 2.1.4 節で述べた方法によって解くことができ, 解は

$$x_t = x_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \quad (3.16)$$

となる。ここで,  $S_t = \exp(x_t)$  であることを用いると, 資産価格は

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\} \quad (3.17)$$

と  $B_t$  の関数として求めることができる。このように, ブラウン運動の指数関数として定義される確率過程を幾何ブラウン運動と言う。

<sup>1</sup>  $df$  が正確には確率積分として定義されることによる。たとえば 津野義道「ファイナンスの確率積分 - 伊藤の公式, Girsanov の定理, Black-Scholes の公式」, 共立出版, 2001. を参照。

### 3.4 資産価格のシミュレーション

確率微分方程式の解 (3.17) を用いると、資産価格のシミュレーションを行うことができる。いま、区間  $[0, T]$  を  $n$  等分し、離散的な時点

$$t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = T \quad (3.18)$$

での資産価格をシミュレーションすることを考える。 $h = T/n$  とすると、

$$\begin{aligned} S_{t_i} &= S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t_{i-1} + h + \sigma (B_{t_{i-1}} + (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})) \right\} \\ &= S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t_{i-1} + \sigma B_{t_{i-1}} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h + \sigma (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right\} \\ &= S_{t_{i-1}} \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h + \sigma (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで、 $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0, h)$  であるから、 $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0, h)$  は標準正規分布に従う乱数  $r_i$  を用いて  $\sqrt{h}r_i$  と書ける。これより、シミュレーションのアルゴリズムは次のようになる。

```

S0 を設定
do i=1, n
    N(0, 1) に従う乱数 ri を発生
    Sti = Sti-1 exp { (μ - 1/2σ2) h + σ√hri }
end do

```

本アルゴリズムに基づき  $\mu = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$  の場合に資産価格のシミュレーションを行った例を図 3.2 に示す。ただし、期間は  $[0, 1]$  とし、 $n = 1000$  とし、3通りのサンプルパスを生成した。この  $\mu$ ,  $\sigma$  の値は、比較的安定した企業の株価の場合に相当する。

また、同じ条件で  $\mu = 0.2$ ,  $\sigma = 0.3$  の場合のシミュレーションを行った例を図 3.3 に示す。この  $\mu$ ,  $\sigma$  の値は、ハイリスク・ハイリターンベンチャー企業などの場合に相当する。図 3.2 と比べると値動きは激しいが、値上がりした場合は大きな利益が得られる様子がシミュレーションできていることがわかる。

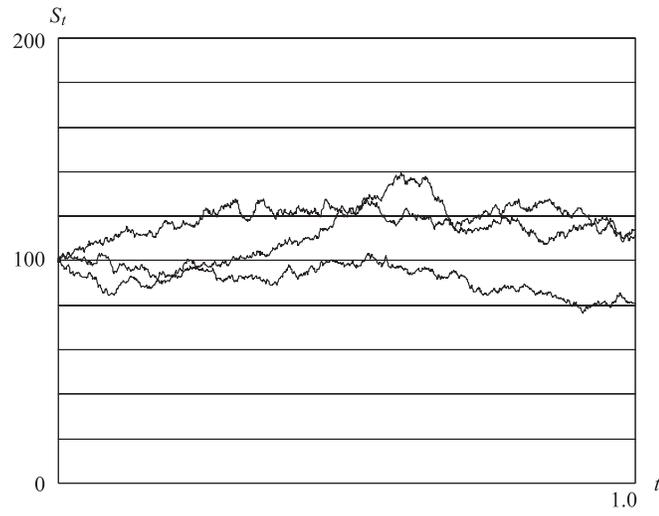


図 3.2: 資産価格のサンプルパス ( $\mu = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ )

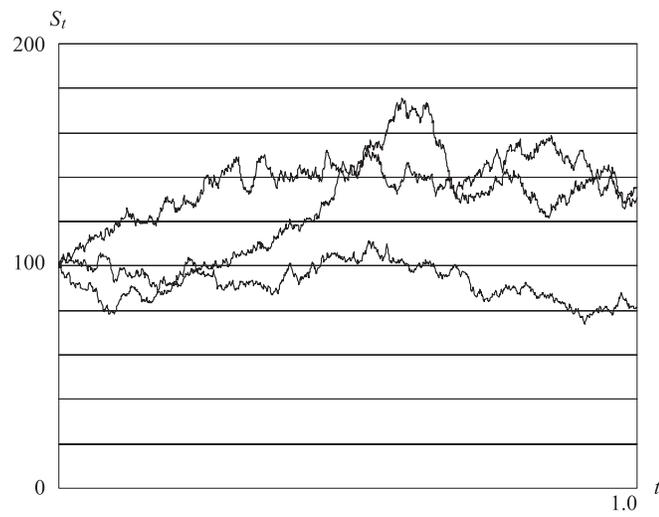


図 3.3: 資産価格のサンプルパス ( $\mu = 0.2$ ,  $\sigma = 0.3$ )

## 第4章 ブラック-ショールズの偏微分方程式

本章では、ブラック-ショールズの資産価格モデルに基づき、ヨーロピアンオプションの価格を求めることを考える。そのため、まず第1章で述べた簡単なモデルの場合と同様に複製ポートフォリオを構成する。そして、これに対して無裁定条件を適用することにより、オプション価格の満たす偏微分方程式を求める。この方程式は変数変換を用いて解析的に解くことができ、その結果がブラック-ショールズのオプション価格公式となる。

### 4.1 ブラック-ショールズの偏微分方程式

#### 4.1.1 ブラック-ショールズの偏微分方程式の導出

**基本的な考え方** 第1章で扱った簡単なモデルでは、時刻  $T$  においてオプションと同じペイオフを持つような安全資産と株式の組み合わせ（複製ポートフォリオ）を考え、時刻  $T$  で同じ価値を持つ資産は時刻 0 においても同じ価値を持たなければならないという原理（無裁定条件）から時刻 0 におけるオプションの価格を導いた。

ブラック-ショールズモデルの場合のオプション価格導出も、原理は全く同じである。ただし、今度は株式とオプションからなる複製ポートフォリオを考え、それが微小時間  $dt$  の間に安全資産と全く同じ（すなわち確定的な）収益を上げるように両者の比率を調節した上で、このポートフォリオに対して無裁定条件を適用する。

**偏微分方程式の導出** いま、資産  $S_t$  に対するオプションを考え、時刻  $t$ 、株価  $S_t$  のときのオプション価格がこの2つの関数として  $V(t, S_t)$  と書けると仮定する<sup>1</sup>。このとき、伊藤の公式より、時刻  $t$  と  $t + dt$  の間の  $V$  の微小変化  $dV$  は次のようになる。

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dB \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>オプション価格がこの2つのみの関数として書け、 $t$  より前の資産価格  $\{S_s | s < t\}$  には依存しないということは自明ではないが、ヨーロピアンオプションの場合にはこの仮定は正しいことが示せる。

ただし，表記の煩雑さを避けるため， $S_t$ ， $B_t$ などの添字は省いた。ここで，オプション1単位と資産 $-\Delta$ 単位からなるポートフォリオを考える。ただし， $\Delta$ は定数とする。このポートフォリオの微小時間 $dt$ における価値変化は式(4.1)および式(3.10)より，

$$d(V - \Delta S) = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - \Delta \mu S \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S dB \quad (4.2)$$

となる。

ここで，特に $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ と選ぶと，ブラウン運動 $dB_t$ の項の係数が消えて

$$d(V - \Delta S) = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \quad (4.3)$$

となる。したがって， $\Delta$ をこのように選んだ場合， $V - \Delta S$ の変化は確率的ではなく，確定的となる。すなわち，ポートフォリオ $V - \Delta S$ は安全資産となる。ところで，安全資産の収益率(利子率)は $r$ であったから，もしこのポートフォリオの収益率が $r$ でないとする，無裁定条件に反する。したがって

$$d(V - \Delta S) = r(V - \Delta S)dt \quad (4.4)$$

でなくてはならない。これを(4.3)式に代入すると，

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \quad (4.5)$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rV = 0 \quad (4.6)$$

となる。これがオプション価格の満たすべき偏微分方程式である。これをブラック-ショールズの偏微分方程式と呼ぶ。

#### 4.1.2 初期条件と境界条件

ブラック-ショールズの偏微分方程式を解いてオプション価格を求めるには，初期条件と境界条件を指定する必要がある。ヨーロピアン・コールオプションの場合，定義域，初期条件，境界条件は以下のようになる。

定義域 時間 $t$ の範囲は0から満期 $T$ まで，資産価格の取り得る値は0以上の任意の値であるから，定義域は

$$[0, T] \times [0, \infty) \quad (4.7)$$

である。

初期条件 満期  $T$  でのオプション価値を考えることにより,  $t = T$  における初期条件 ( 正確には終端条件 ) が次のように定まる。

$$\begin{aligned} V(T, S) &= \text{ペイオフ} \\ &= \max(S_T - K, 0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

境界条件 境界条件は  $S = 0$  と  $S \rightarrow \infty$  に対して定義される。

$S = 0$  の時 :

式 (3.17) において  $0 \rightarrow t, t \rightarrow T$  とすると,

$$S_T = S_t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma (B_T - B_t) \right\} \quad (4.9)$$

であるから,

$$S_t = 0 \Rightarrow S_T = 0 \quad (4.10)$$

が成り立ち, このとき満期におけるオプション価値は  $\max(0 - K, 0) = 0$  となる。将来価値が 0 となることがわかっているオプションの現在価値は明らかに 0 であるから,

$$V(0, t) = 0 \quad (4.11)$$

となる。これが  $S = 0$  での境界条件である。

$S \rightarrow \infty$  の時 :

このときの境界条件を厳密に求めるのは困難であるが, 次のように考える。まず, 時刻  $t$  での資産価格を  $S \gg K$  とし, これが満期  $T$  まで安全資産と同じ率  $r$  で確定的に増加すると仮定する。すると, 満期でのオプション価値は  $\max(S e^{r(T-t)} - K, 0) = S e^{r(T-t)} - K$  となる。満期で確実にこれだけの利益が得られるのだから, このオプションは安全資産であり, その現在価値  $V(S, t)$  は, 満期で同じ払い戻し額を持つ銀行預金の現在価値, すなわち

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} (S e^{r(T-t)} - K) = S - K e^{-r(T-t)} \quad (4.12)$$

となる。これが  $S \rightarrow \infty$  のときの境界条件である。なお,  $S \gg K$  のため, この条件は簡単に

$$V(S, t) \sim S \quad (4.13)$$

としてもよい。

## 4.2 ブラック-ショールズのオプション価格公式

### 4.2.1 熱伝導方程式への変形

変数変換による方程式の簡単化 ブラック-ショールズの偏微分方程式(4.6)を初期条件(4.8), 境界条件(4.9), (4.13)の下で解くことにより, ヨーロピアン・

コールオプションの価格を求めることができる。ただし、この偏微分方程式は微分の係数に  $S$  や  $S^2$  が入った複雑な形をしているため、解きやすいように変数変換を行って簡単な方程式に変形する。まず、 $\log S = x$  とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{S} \left( \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (4.15)$$

$\tau' = T - t$  とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \tau'} \quad (4.16)$$

これらを代入すると、

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau'} + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rV = 0 \quad (4.17)$$

こうして、係数がすべて定数の方程式へと変形できた。次に、 $V$  と  $\frac{\partial V}{\partial x}$  の項を消去するために  $V = e^{\alpha x + \beta \tau'} U$  とおいて代入すると、

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial U}{\partial \tau'} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left\{ \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \alpha\sigma^2 \right\} \frac{\partial U}{\partial x} \\ & + \left\{ -\beta + \alpha \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 \alpha^2 - r \right\} U = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

この方程式において  $U$  および  $\frac{\partial U}{\partial x}$  の項を消去するには、

$$\begin{cases} \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \alpha\sigma^2 = 0 \\ -\beta + (\alpha - 1)r + \frac{1}{2}\sigma^2 \alpha(\alpha - 1) = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

となるように  $\alpha, \beta$  を定めればよい。すなわち、

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ \beta = -\frac{1}{8\sigma^2}(\sigma^2 + 2r)^2 \end{cases} \quad (4.20)$$

とする。これを代入すると、

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau'} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (4.21)$$

最後に  $\tau = \tau' \left( \frac{1}{2}\sigma^2 \right)$  とおくと、

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (4.22)$$

となり、ブラック-ショールズ方程式は最終的に熱伝導方程式に変形される。

初期条件と境界条件の変換 以上のような独立変数・従属変数の変換により、初期条件と境界条件は次のように変換される。

$$\text{初期条件: } U_0(x) = \max \left( e^{(1-\alpha)x} - K e^{-\alpha x}, 0 \right) \quad (4.23)$$

$$\text{境界条件: } \begin{cases} x \rightarrow -\infty \text{ の時: } e^{\alpha x + \beta \tau'} U \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \text{ の時: } e^{\alpha x + \beta \tau'} U \rightarrow e^x \end{cases} \quad (4.24)$$

#### 4.2.2 熱伝導方程式の基本解と重ね合わせの原理

重ね合わせの原理 熱伝導方程式の初期値問題を解くには、重ね合わせの原理を用いる。これは、関数  $U_1(\tau, x)$ 、 $U_2(\tau, x)$  が共に方程式(4.22)の解ならばその任意の線形結合

$$c_1 U_1(\tau, x) + c_2 U_2(\tau, x) \quad (4.25)$$

もまた(4.22)の解となるという原理である。この原理は、連続的なパラメータ  $\lambda$  を持つ解の集合  $\{U_\lambda(\tau, x)\}$  に対しても拡張でき、 $U_\lambda(\tau, x)$  に重み  $c_\lambda$  をかけて足し合わせた(すなわち積分した)関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_\lambda U_\lambda(\tau, x) d\lambda \quad (4.26)$$

もまた(4.22)の解となることが示せる。

ここで、もし重み  $c_\lambda$  をうまく選ぶことにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_\lambda U_\lambda(0, x) d\lambda = U_0(x) \quad (4.27)$$

が成り立つようにできれば、式(4.26)は初期条件を満たす熱伝導方程式の解となり、初期値問題が解けたことになる。

デルタ関数と基本解 以上の事実を使って初期値問題を解くため、まずデルタ関数  $\delta(x)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad (x \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

通常の場合、1点以外で0であれば積分値も0となるので、 $\delta(x)$  は通常の意味での関数ではなく、超関数と呼ばれる。デルタ関数の基本的な性質として、次のことが成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) \delta(x - x_0) dx_0 = f(x) \quad (4.29)$$

ここで,  $f(x)$  は任意の関数である。

次に, 初期値  $U_0(x) = \delta(x - x_0)$  に対する熱伝導方程式(4.22) の解を考える。この解は基本解と呼ばれ, 次のように与えられる<sup>2</sup>。

$$U_{x_0}(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right\} \quad (4.30)$$

いま, 初期条件  $U_0(x)$  と基本解  $U_{x_0}(\tau, x)$  とを使って

$$U(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0) U_{x_0}(\tau, x) dx_0 \quad (4.31)$$

という関数を作ると, これは基本解の重ね合わせであるから熱伝導方程式(4.22) の解であり, かつ

$$\begin{aligned} U(0, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0) U_{x_0}(0, x) dx_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0) \delta(x - x_0) dx_0 \\ &= U_0(x) \end{aligned} \quad (4.32)$$

であるから, 初期条件も満たす。以上より, 熱伝導方程式の初期値問題は(4.31) 式の積分を実行しさえすれば解けることがわかった。

### 4.2.3 ブラック-ショールズのオプション価格公式

コールオプションの価格計算問題では, 初期値

$$U_0(x) = \begin{cases} e^{(1-\alpha)x} - Ke^{-\alpha x} & (x \geq \log K) \\ 0 & (x < \log K) \end{cases} \quad (4.33)$$

式(4.33) と式(4.30) とを式(4.31) に代入することにより, 解は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} U(\tau, x) &= \int_{\log K}^{\infty} \left\{ e^{(1-\alpha)x_0} - Ke^{-\alpha x_0} \right\} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right\} dx_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\log K}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\tau} \left\{ -(x-x_0)^2 - 4\tau(1-\alpha)x_0 \right\}\right] dx_0 \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\log K}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\tau} \left\{ -(x-x_0)^2 + 4\tau\alpha x_0 \right\}\right] dx_0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

ここで,  $\exp$  の中を  $x_0$  について平方完成すると,

$$\begin{aligned} U(\tau, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\log K}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\tau} \left\{ x_0 - (x + 2\tau(1-\alpha)) \right\}^2 + x(1-\alpha) + \tau(1-\alpha)^2\right] dx_0 \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\log K}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{4\tau} \left\{ x_0 - (x - 2\tau\alpha) \right\}^2 - x\alpha + \tau\alpha^2\right] dx_0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

<sup>2</sup>これが実際に熱伝導方程式の解であり, かつ  $\tau \rightarrow 0$  のとき  $\delta(x - x_0)$  となることは, 簡単な計算により確かめられる。なお, この解を求めるには, たとえばフーリエ変換を使えばよい。

更に,  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{-z^2/2} dz$  (すなわち  $\Phi(z)$  は標準正規分布の分布関数) とおくと, この式の積分は  $\Phi(z)$  を使って表すことができ,

$$U(\tau, x) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\{-\log K + x + 2\tau(1-\alpha)\}\right) \exp\{x(1-\alpha) + \tau(1-\alpha)^2\} \\ - K\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\{-\log K + x - 2\tau\alpha\}\right) \exp(-x\alpha + \tau\alpha^2) \quad (4.36)$$

となる。ここで,

$$\begin{cases} V = e^{\alpha x + \beta \tau'} U \\ x = \log S \\ \tau = \frac{1}{2}\sigma^2\tau' = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \\ \alpha, \beta \text{ の定義} \end{cases}$$

を代入すると,

$$V(t, S) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \quad (4.37)$$

$$\text{ただし, } \begin{cases} d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{cases}$$

となる。なお, 以上では境界条件のことは陽に考慮しなかったが, この解は境界条件 (4.11), (4.13) も満たすことが示せる。したがって (4.37) は時刻  $t$ , 資産価格  $S$  のときにヨーロピアン・コールオプションの価格を与える式となる。これはブラック-ショールズの公式と呼ばれる。

#### 4.2.4 オプション価格の計算例

ブラック-ショールズ公式によりヨーロピアン・コールオプションの価格を計算した例を図4.1に示す。ここで、 $r = 0.1$ 、 $\sigma = 0.3$ 、 $S_0 = 100$ であり、行使価格  $K$  の関数としてのオプション価格を  $T = 0$  から  $T = 1.0$  までの複数の満期について描いた。

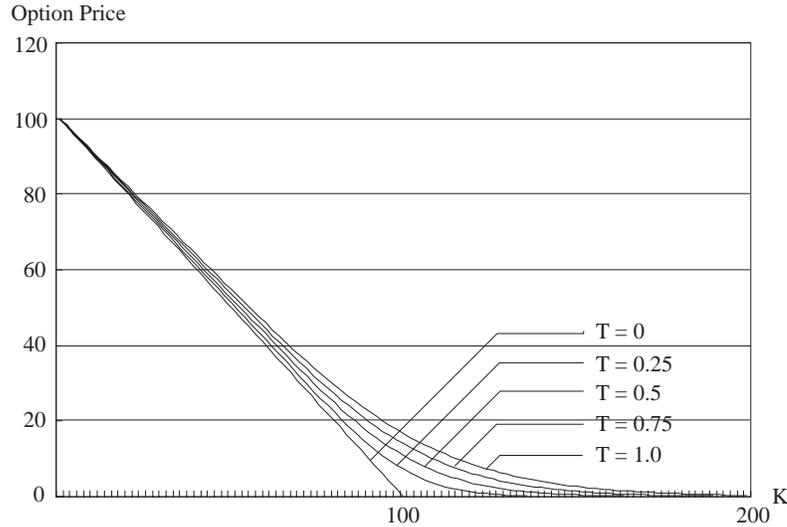


図 4.1: ブラック-ショールズ公式により計算したコールオプション価格

グラフより、オプション価格は  $K$  に関して単調減少の関数であり、 $T = 0$  のときはオプションのペイオフ  $\max(S_T - K, 0)$  に一致することがわかる。また、価格は  $T$  が大きくなるにつれて上昇し、滑らかな関数になっている。これより、ブラック-ショールズの公式で得られる価格は、実際に市場で観測されるオプション価格（第1回レポート参照）の特徴をよく再現していることがわかる。

### 4.3 プット・コール・パリティ

以上ではヨーロピアン・コールオプションの場合を考えましたが、プットオプションに対しても同様に初期条件・境界条件を与えてブラック-ショールズの偏微分方程式(4.6)を解くことにより、価格公式を導くことができる。

しかし、コールオプションの価格とプットオプションの価格の間にはプット・コール・パリティと呼ばれる関係式が成り立ち、これを使うと簡単にプットオプションの価格公式を導出することができる。

## 第5章 差分法によるオプション価格計算

### 5.1 問題設定

前章では、ブラック-ショールズの偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rV = 0 \quad (5.1)$$

に対して変数変換

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 \tau' = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t) \quad (5.2)$$

$$x = \log S \quad (5.3)$$

$$V = e^{\alpha x + \beta \tau'} U \quad (5.4)$$

を施し、その結果得られる熱伝導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.5)$$

を適当な初期条件・境界条件の下で解くことにより、コールオプション価格の解析解（ブラック-ショールズ公式）を求めた。

ヨーロッパン・コールオプションあるいはプットオプションの場合、ペイオフは  $S_T$  の関数として見たとき区分的に線形の比較的簡単な関数となっている（図 5.1 参照）。しかし、より複雑なペイオフを持つオプション、あるいはブラック-ショールズモデルより高度なモデルの下でのオプションの価格は解析的には求められないことが多く、その場合には数値計算が必要となる。本章ではそのための数値解法のうち、差分法について説明する。

解析解を求める場合と同様、差分法を適用する場合にも、まず変数変換 (5.2) ~ (5.4) を行って方程式を熱伝導方程式に変換しておくほうが、計算精度や計算の安定性の面で有利である。そこで、以下では次の熱伝導方程式の初期値問題に対して差分法を適用することを考える。

熱伝導方程式

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.6)$$

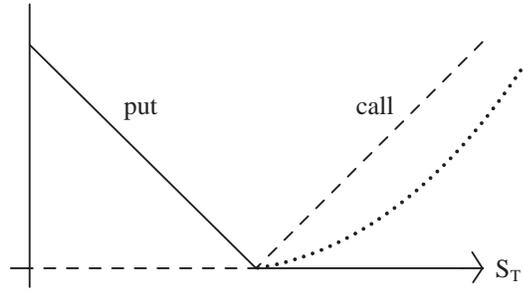


図 5.1: オプションの種類とペイオフ

初期条件

$$U(0, x) = U_0(x) \quad (5.7)$$

境界条件

$$U(\tau, x_{\min}) = U_{\min}(\tau) \quad (5.8)$$

$$U(\tau, x_{\max}) = U_{\max}(\tau) \quad (5.9)$$

解析解を求める場合は、 $x$  の定義域は  $(-\infty, \infty)$  で考えたが、計算機では無限の領域は扱えないため、 $x$  の値に上限・下限を設ける必要がある。ここでは、 $x$  の取り得る値の範囲を  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  とした。この初期値問題の解析領域を図 5.2 に示す。

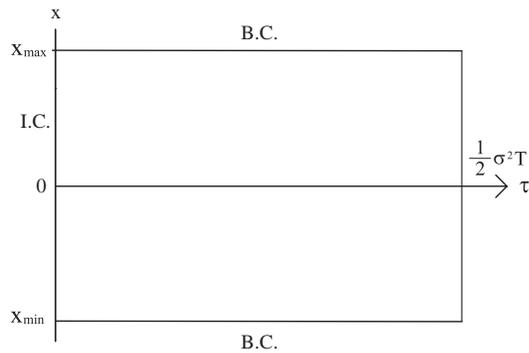


図 5.2: 初期値問題の解析領域

## 5.2 陽的差分法

### 5.2.1 差分による微分の近似

差分法では、図 5.2 の領域を図 5.3 のように格子状に分割し、各格子点における  $U$  の値を用いて偏微分方程式 (5.6) を近似する。格子の縦横の間隔は全領域にわたって均一であるとし、 $\tau$  方向の間隔を  $\Delta\tau$ 、 $x$  方向の間隔を  $\Delta x$  とする。

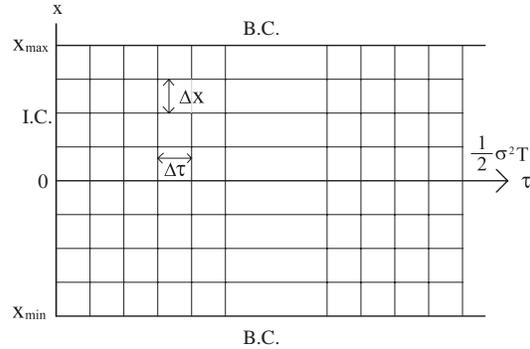


図 5.3: 格子による解析領域の分割

いま、 $U(\tau + \Delta\tau)$  を  $\tau$  の周りでテイラー展開すると、

$$U(\tau + \Delta\tau) = U(\tau) + \Delta\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(\Delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dots \quad (5.10)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{U(\tau + \Delta\tau) - U(\tau)}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Delta\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dots \\ &= \frac{U(\tau + \Delta\tau) - U(\tau)}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau) \end{aligned} \quad (5.11)$$

が成り立つ。この右辺第 1 項による  $\frac{\partial U}{\partial \tau}$  の近似を前進差分による近似と呼ぶ。この近似の誤差は  $O(\Delta\tau)$  である。

一方、 $U(x \pm \Delta x)$  を  $x$  の周りでテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} U(x + \Delta x) &= U(x) + \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots \\ U(x - \Delta x) &= U(x) - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots \end{aligned}$$

が得られる。ここで、両辺を足すと、

$$U(x + \Delta x) + U(x - \Delta x) = 2U(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{12}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \dots \quad (5.12)$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{U(x + \Delta x) - 2U(x) + U(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \\ &= \frac{U(x + \Delta x) - 2U(x) + U(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)\end{aligned}\quad (5.13)$$

が成り立つ。この右辺第1項による  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  の近似を中心差分による近似と呼ぶ。この近似の誤差は  $O((\Delta x)^2)$  である。

### 5.2.2 陽的差分法の公式

熱伝導方程式 (5.6) に対し, 左辺に前進差分, 右辺に中心差分を適用すると, 次の式が得られる。

$$\frac{U(\tau + \Delta\tau, x) - U(\tau, x)}{\Delta\tau} = \frac{U(\tau, x + \Delta x) - 2U(\tau, x) + U(\tau, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}\quad (5.14)$$

いま, 第  $(i, j)$  番目の格子点を  $(\tau_i, x_j) = (i\Delta\tau, j\Delta x)$  とし, そこでの  $U$  の値を  $U_{i,j}$  と書くと, この式は次のように書き直せる。

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta\tau} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta x)^2}\quad (5.15)$$

さらに,

$$r = \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\quad (5.16)$$

とおき, 左辺に時刻  $\tau_{i+1}$  の項, 右辺に時刻  $\tau_i$  の項が来るように整理すると,

$$U_{i+1,j} = rU_{i,j+1} + (1 - 2r)U_{i,j} + rU_{i,j-1}\quad (5.17)$$

この式は, 時刻  $\tau_i$  における3点での関数値  $U_{i,j-1}, U_{i,j}, U_{i,j+1}$  が与えられれば, それから時刻  $\tau_{i+1}$  における関数値  $U_{i+1,j}$  が計算できることを示している (図 5.4)。このようにして, 初期値から始めて時刻  $\tau_1, \tau_2, \dots$  での関数値を次々に計算していく方法を陽的差分法または陽解法と呼ぶ。

### 5.2.3 計算例

陽的差分法を用いてヨーロピアン・コールオプションの価格を計算した例を図 5.5 に示す。ここで,  $r = 0.1, \sigma = 0.3, K = 100$  であり, 初期資産価格  $S_0$  の関数としての価格を複数の満期  $T = 0, T = 0.5, T = 1.0$  に対してプロットした<sup>1</sup>。なお,  $x_{\max} = -x_{\min} = 5.0$  とし, 時間方向の分割数を 150, 空

<sup>1</sup>陽的差分法の計算を実行すると, 最終的に  $\tau = \frac{1}{5}\sigma^2 T, x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  における  $U$  の値が得られる。これは, 元の変数に戻すと,  $t = 0$  で様々な  $S_0$  の値に対するオプション価格  $V$  が得られたことに相当する。

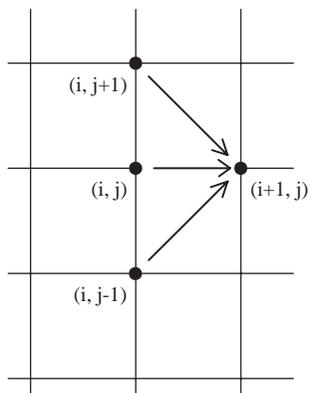


図 5.4: 陽的差分法における計算

間 ( $x$ ) 方向の正の部分の分割数を 200 (負の部分も同じ) とした。このとき,

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 1/150 = 3 \times 10^{-4} \\ \Delta x &= x_{\max}/200 = 2.5 \times 10^{-2}\end{aligned}\quad (5.18)$$

である。

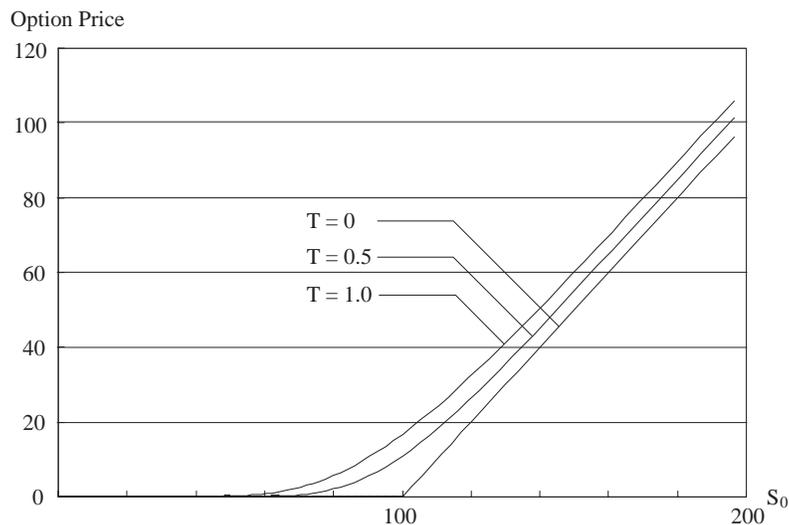


図 5.5: 陽的差分法により計算したコールオプション価格 (1)

計算結果は,たとえば  $T = 1.0$  で  $S_0 = 100$  のとき,  $V = 16.72971$  となる。一方,ブラック-ショールズ公式によるこの場合の解析解は  $V = 16.73411$  であり,比較的正確な価格が得られていることがわかる。

次に、同じ条件で空間方向の正の部分の分割数のみを210に増やして計算を行った結果を図5.6に示す。このとき、

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= 3 \times 10^{-4} \\ \Delta x &= x_{\max}/210 = 2.381 \times 10^{-2}\end{aligned}\quad (5.19)$$

である。

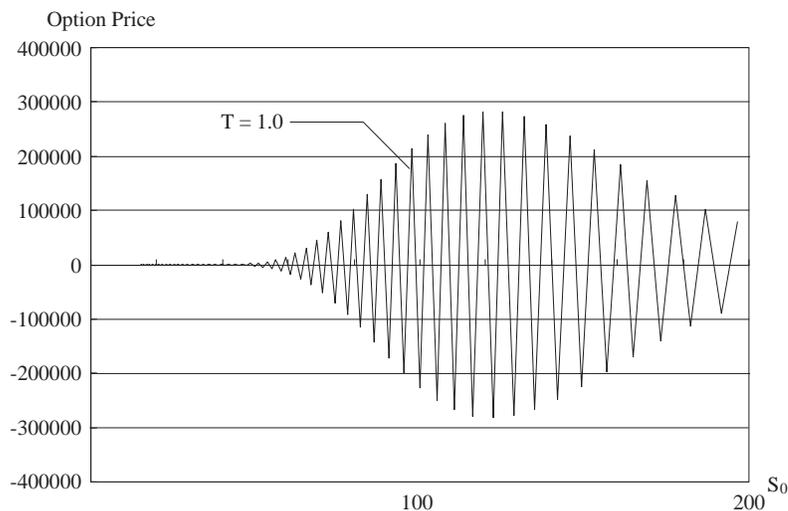


図 5.6: 陽的差分法により計算したコールオプション価格 (2)

本来なら分割数を増すことで、結果はより正確になると考えられるが、図5.6を見ると、値が極端に大きく、かつ正負に振動するめちゃめちな解になってしまっている。このような現象はどうして起きるのだろうか。

#### 5.2.4 陽的差分法の安定性解析

実は陽的差分法では、計算が正しく行われるために  $\Delta\tau$ ,  $\Delta x$  が満たすべきある関係式があり、これが満たされないと、解の絶対値が時間ステップと共に指数関数的に増大し、図5.6のように真の解からかけ離れた解になってしまうことが知られている。これを陽的差分法の不安定性と呼ぶ。

この現象を解析するため、まず陽的差分法の公式(5.17)を行列形式で書いてみよう。 $x_{\max} = j_{\max}\Delta x$ ,  $x_{\min} = j_{\min}\Delta x$  とし、 $j = j_{\min}, j_{\min}+1, \dots, j_{\max}$

に対する式をまとめて書くと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} U_{i+1, j_{\min}+1} \\ U_{i+1, j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i+1, j_{\max}-2} \\ U_{i+1, j_{\max}-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & 1-2r & r \\ & & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i, j_{\min}+1} \\ U_{i, j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i, j_{\max}-2} \\ U_{i, j_{\max}-1} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} U_{i, j_{\min}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{i, j_{\max}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

ここで,  $U_{i, j_{\min}}, U_{i, j_{\max}}$  は境界条件により与えられるため, 定数ベクトルとして右辺第2項に置いた。この式は次のように書き直せる。

$$\mathbf{U}_{i+1} = A\mathbf{U}_i + \mathbf{b}_i \tag{5.21}$$

これを繰り返し使うことにより, 第*i*ステップでの解ベクトル  $\mathbf{U}_i$  は初期ベクトル  $\mathbf{U}_0$  と境界条件ベクトル  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}$  を使って次のように表せる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_i &= A\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{b}_{i-1} \\
 &= A(A\mathbf{U}_{i-2} + \mathbf{b}_{i-2}) + \mathbf{b}_{i-1} \\
 &= \dots \\
 &= A^i\mathbf{U}_0 + (A^{i-1}\mathbf{b}_0 + A^{i-2}\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_{i-1})
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

いま,  $A$  の固有値を  $\lambda_l$ , 対応する固有ベクトルを  $\mathbf{v}_l$  とすると,  $A$  は実対称行列だから,  $\{\mathbf{v}_l\}$  は正規直交系をなし,  $\mathbf{U}_0$  は  $\{\mathbf{v}_l\}$  で次のように展開できる。

$$\mathbf{U}_0 = \sum c_l \mathbf{v}_l \tag{5.23}$$

これより,

$$A^l \mathbf{U}_0 = \sum c_l \lambda_l^l \mathbf{v}_l \tag{5.24}$$

が成り立つ。

ここで, もし  $\forall l |\lambda_l| < 1$  ならば, 式(5.24)より,  $i$ が進むにつれて,  $\mathbf{U}_i$  に対する初期値の影響は徐々に小さくなっていくことがわかる。これは, 熱伝導方程式の初期値問題の解に対して期待される性質である。ところが, もし  $\exists l |\lambda_l| > 1$  ならば,  $\mathbf{U}_0$  に含まれる  $\mathbf{v}_l$  成分は  $i$ につれて指数関数的に増大する。これは本来の熱伝導方程式の解にはない性質であり, これが不安定性をもたらす原因である。

もし  $\forall l |\lambda_l| \leq 1$  ならば、初期値  $U_0$  に含まれる任意の固有ベクトルの成分は時間と共に減衰し（または一定の大きさを保ち）、指数関数的な増大は起こらない。このとき、陽的差分法は安定であるという。そこで、 $\forall l |\lambda_l| \leq 1$  となるための条件を調べてみよう。それには次の補題を使う。

補題  $(M-1) \times (M-1)$  行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & 1-2r & r \\ & & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

と定義するとき、 $A$  の固有値は

$$\lambda_l = 1 - 4r \sin^2 \frac{l\pi}{2M} \quad (l = 1, \dots, M-1) \quad (5.26)$$

となる。

この補題は  $\lambda_l$  に対応する固有ベクトルを  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{M-1})^t$  (上付きの  $t$  は転置を表す) とおき、固有方程式  $A\mathbf{v} = \lambda_l \mathbf{v}$  を  $\{v_j\}_{j=1}^{M-1}$  に関する3項漸化式と見て解くことにより示せる<sup>2</sup>。

式 (5.26) より  $\lambda_l < 1$  は明らかであるから、 $\lambda_l < -1$  となることがあるかどうかを調べればよい。 $\lambda_l$  が最小となるのは  $l = M-1$  のときで、このとき

$$\lambda_{M-1} = 1 - 4r \sin^2 \frac{(M-1)\pi}{2M} \simeq 1 - 4r \quad (5.27)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \text{陽的差分法が安定} &\Leftrightarrow A \text{ の固有値の絶対値がすべて } 1 \text{ 以下} \\ &\Leftrightarrow |\lambda_{M-1}| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 - 4r \geq -1 \quad (\text{近似的に } \lambda_{M-1} = 1 - 4r \text{ とする。}) \\ &\Leftrightarrow r \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \Delta\tau \leq \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

となり、陽的差分法が安定であるための条件は  $\Delta\tau \leq \frac{1}{2}(\Delta x)^2$  であることがわかる。

この条件を図 5.5 と図 5.6 の例について調べてみると、正しく解が求まっている図 5.5 の場合は

$$\Delta\tau = 0.48 \times (\Delta x)^2 \quad (5.28)$$

<sup>2</sup>詳しくは、たとえば水島二郎、柳瀬眞一郎著「理工学のための数値計算法」、第2版(数理工学社、2009)などを参照のこと。

で条件が満たされているのに対し，解の指数的增长が起きている図 5.6 の場合は

$$\Delta\tau \simeq 0.53 \times (\Delta x)^2 \quad (5.29)$$

となって条件が満たされていない。したがって，この条件を使うことにより安定性を適切に判定できることがわかる。

### 5.2.5 陽的差分法の計算量と精度

陽的差分法において解の精度を上げるには，格子間隔  $\Delta\tau$ ,  $\Delta x$  を小さくする必要がある。ところが，もし  $\Delta x \rightarrow \frac{1}{2}\Delta x$  とすると，式 (5.29) の条件より， $\Delta\tau \rightarrow (\frac{1}{2})^2\Delta\tau$  とする必要があり，このとき，格子点数は  $2 \times 4 = 8$  倍になってしまう。このように陽的差分法では，計算量が  $\Delta x$  の 3 乗に反比例して増えるため，あまり精度を上げられないという問題点がある。

## 5.3 陰的差分法

### 5.3.1 陰的差分法の公式

陽的差分法の持つ不安定性を克服することのできる解法が，陰的差分法あるいは陰解法と呼ばれる解法である。

まず， $U(\tau - \Delta\tau)$  の  $\tau$  の周りでのテイラー展開を考えると，

$$U(\tau - \Delta\tau) = U(\tau) - \Delta\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{2}(\Delta\tau)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \cdots \quad (5.30)$$

よって，

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{U(\tau) - U(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\Delta\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \cdots \\ &= \frac{U(\tau) - U(\tau - \Delta\tau)}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau) \end{aligned} \quad (5.31)$$

が成り立つ。この右辺第 1 項による  $\frac{\partial U}{\partial \tau}$  の近似を後退差分による近似と呼ぶ。この近似の誤差は前進差分と同様， $O(\Delta\tau)$  である。

陰的差分法では，第  $(i+1, j)$  番目の格子点における熱伝導方程式 (5.6) を考え，左辺に後退差分，右辺に中心差分を適用する。その結果得られる式は次のようになる。

$$\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta\tau} = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} \quad (5.32)$$

式 (5.16) で定義される  $r$  を用いると，これは次のように書き直せる。

$$-rU_{i+1,j} + (1 + 2r)U_{i+1,j} - rU_{i+1,j-1} = U_{i,j} \quad (5.33)$$

この式は、陽的差分法の式 (5.17) とは逆に、時刻  $\tau_{i+1}$  における3点での関数値  $U_{i+1,j-1}, U_{i+1,j}, U_{i+1,j+1}$  と時刻  $\tau_i$  における1点での関数値  $U_{ij}$  との関係式になっている (図 5.7)。式 (5.33) は  $j = j_{\min} + 1, \dots, j_{\max} - 1$  に対して与えられるから、 $\{U_{ij}\}$  がわかっているとき、これは  $\{U_{i+1,j}\}$  に関する連立一次方程式となる。これを行列形式で書くと、次のようになる。

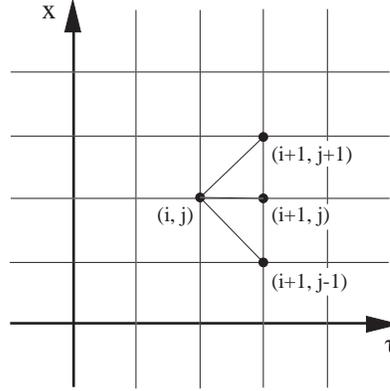


図 5.7: 陰的差分法における関係式

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1+2r & -r & 0 & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & -r & 1+2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i+1,j_{\min}+1} \\ U_{i+1,j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i+1,j_{\max}-2} \\ U_{i+1,j_{\max}-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} U_{i,j_{\min}+1} \\ U_{i,j_{\min}+2} \\ \vdots \\ U_{i,j_{\max}-2} \\ U_{i,j_{\max}-1} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} U_{i+1,j_{\min}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{i+1,j_{\max}} \end{pmatrix}, \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

この式を

$$BU_{i+1} = U_i + \mathbf{b}_{i+1} \quad (5.35)$$

と書くと、陰的差分法では時間ステップを1つ進めるのに、 $B$  を係数行列とする連立一次方程式を解く必要があることがわかる。

この連立一次方程式は、ガウスの消去法によって解くことができる。行列  $B$  は三重対角行列 (対角線とその上下のみに非ゼロ要素が存在する形の行列) であり、このことを利用するとガウスの消去法の演算量は  $O(M)$  で済む。ま

た、行列  $B$  はどのタイムステップでも変わらないことを利用すると、 $LU$  分解の技法を用いることで、さらに演算量を削減することができる<sup>3</sup>。

### 5.3.2 陰的差分法の安定性解析

式 (5.35) より、

$$\mathbf{U}_{i+1} = B^{-1}(\mathbf{U}_i + \mathbf{b}_{i+1}) \quad (5.36)$$

であり、これを繰り返し使うと、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i &= B^{-1}(\mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{b}_i) \\ &= B^{-1}(B^{-1}(\mathbf{U}_{i-2} + \mathbf{b}_{i-1}) + \mathbf{b}_i) \\ &= \dots \\ &= B^{-i}\mathbf{U}_0 + (B^{-i}\mathbf{b}_1 + B^{-i+1}\mathbf{b}_2 + \dots + B^{-1}\mathbf{b}_i) \end{aligned} \quad (5.37)$$

となる。したがって、陽的差分法の場合と同様に考えると、 $B^{-1}$  の固有値を  $\mu_l$  としたとき、 $\forall l |\mu_l| \leq 1$  ならば陰的差分法は安定ということになる。

ところが、

$$B = -A + 2I \quad (I: \text{単位行列}) \quad (5.38)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \mu_l &= (-\lambda_l + 2)^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{l\pi}{2M}} \quad (l = 1, \dots, M-1) \end{aligned} \quad (5.39)$$

であり、明らかに、 $0 < \mu_l < 1$  となる。したがって、 $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  の値にかかわらず、陰的差分法は安定となる。これを 絶対安定と呼ぶ。

### 5.3.3 計算例

図 5.6 と同じコールオプションの価格を陰的差分法により計算した結果を図 5.8 に示す。ここで、 $x_{\max} = -x_{\min} = 5.0$ 、時間方向の分割数は 150、 $x$  軸の正の部分の分割数は 400 であり、

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 1/150 = 3 \times 10^{-4} \\ \Delta x &= x_{\max}/400 = 1.25 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

<sup>3</sup>ガウスの消去法については、たとえば森正武著「FORTRAN77 数値計算プログラミング」(岩波書店、1986)を参照のこと。ここには  $LU$  分解についても説明がある。

となっている。このとき，

$$\Delta\tau = 1.92 \times (\Delta x)^2 \quad (5.41)$$

であり，陽的差分法の安定性の条件は満たされていないが，陰的差分法では，図5.8の通り，全く問題なく解が求まっている。

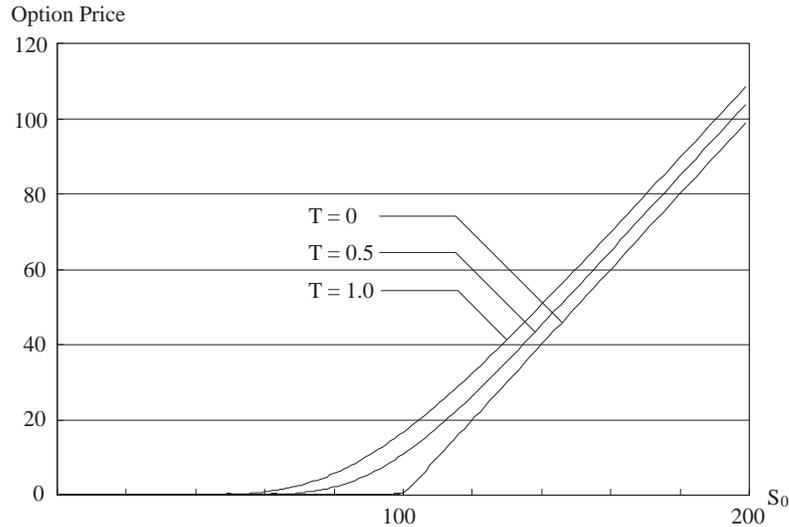


図 5.8: 陰的差分法により計算したコールオプション価格

## 5.4 クランク-ニコルソン法

### 5.4.1 クランク-ニコルソン法の公式

陽的差分法，陰的差分法では，ともに空間方向の2階微分の近似に中心差分を用いており，その誤差は  $O((\Delta x)^2)$  (2次精度) である。一方，時間方向の1階微分の近似には前進差分または後退差分を用いるが，その誤差はともに  $O(\Delta\tau)$  (1次精度) である。したがって，これらの解法では時間方向の差分近似による誤差が大きく，空間方向の差分近似の精度の高さを活かさないという問題点がある。そこで，時間方向も2次精度とするために考案された解法がクランク-ニコルソン法である。

クランク-ニコルソン法では第  $(i + \frac{1}{2}, j)$  番目の格子点<sup>4</sup>における熱伝導方程式 (5.6) を考え，両辺に差分近似を適用する。

<sup>4</sup>実際にはこの点には格子点はなく，第  $(i, j)$  番目の格子点と第  $(i + 1, j)$  番目の格子点との中点を考えるという意味である。

まず、時間方向については、 $U_\tau$  および  $U_{\tau+\Delta\tau}$  を  $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$  の周りで展開すると、

$$\begin{aligned} U_{\tau+\Delta\tau} &= U_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left( \frac{1}{2}\Delta\tau \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left( \frac{1}{2}\Delta\tau \right)^2 + O((\Delta\tau)^3) \\ U_\tau &= U_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} - \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left( \frac{1}{2}\Delta\tau \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} \left( \frac{1}{2}\Delta\tau \right)^2 + O((\Delta\tau)^3) \end{aligned} \quad (5.42)$$

これらより、

$$\frac{U_{\tau+\Delta\tau} - U_\tau}{\Delta\tau} = \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\frac{1}{2}\Delta\tau} + O((\Delta\tau)^2) \quad (5.43)$$

となり、時間方向の差分を2次精度にすることができた。

一方、空間方向の差分については、時刻  $\tau + \frac{1}{2}\Delta\tau$  に格子点がないため、中心差分の式 (5.13) を直接この点に対して適用することはできない。そこで、点  $(i, j)$  における中心差分の式と点  $(i+1, j)$  における中心差分の式との平均を取ることにより、点  $(i + \frac{1}{2}, j)$  での中心差分の式の近似とする<sup>5</sup> (図 5.9)。

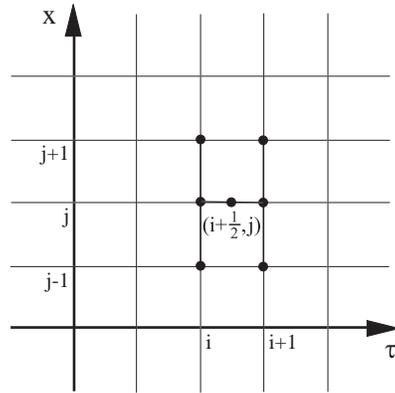


図 5.9: クランク-ニコルソン法における計算

以上より、クランク-ニコルソン法の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta\tau} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

<sup>5</sup>この近似による誤差は  $O((\Delta\tau)^2(\Delta x)^2)$  であり、左辺および右辺の中心差分そのものの誤差に比べて無視できる。

$r = \frac{\Delta r}{(\Delta x)^2}$  を使って表すと,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}rU_{i+1,j+1} + (1+r)U_{i+1,j} - \frac{1}{2}rU_{i+1,j-1} \\ & = \frac{1}{2}rU_{i,j+1} + (1-r)U_{i,j} + \frac{1}{2}U_{i,j-1} \end{aligned} \quad (5.45)$$

これは陰的差分法の場合と同様,  $U_{i+1}$  に関する連立一次方程式となっている。これを行列形式で表し, 陽的差分法の行列  $A$  を使って書き直すと次のようになる。

$$\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) \mathbf{U}_{i+1} - \frac{1}{2}\mathbf{b}_{i+1} = \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I\right) \mathbf{U}_i + \frac{1}{2}\mathbf{b}_i \quad (5.46)$$

クランク-ニコルソン法では, 時間ステップを1つ進めるために,  $U_{i+1}$  に関するこの連立一次方程式を解くことが必要である。

#### 5.4.2 クランク-ニコルソン法の安定性解析

式 (5.46) より, クランク-ニコルソン法で  $U_{i+1}$  を求める式は

$$\mathbf{U}_{i+1} = \underbrace{(3I - A)^{-1}(I + A)}_C \mathbf{U}_i + (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{i+1}) \quad (5.47)$$

となる。したがって陽的差分法, 陰的差分法の場合と同様, 安定性を調べるには行列  $C$  の固有値を調べればよい。この固有値を  $\nu_l$  とすると,

$$\begin{aligned} \nu_l &= \frac{1 + \lambda_l}{3 - \lambda_l} \\ &= \frac{1 - 2r \sin^2\left(\frac{l\pi}{2M}\right)}{1 + 2r \sin^2\left(\frac{l\pi}{2M}\right)} \quad (l = 1, \dots, M-1) \end{aligned} \quad (5.48)$$

ここで, 一般に2つの実数  $a$  と  $b$  が共に正のとき,

$$\left| \frac{a-b}{a+b} \right| < 1 \quad (5.49)$$

であることを使うと,

$$|\nu_l| < 1 \quad (l = 1, \dots, M-1) \quad (5.50)$$

となることがわかる。したがって, クランク-ニコルソン法も絶対安定である。

#### 5.4.3 計算例

図 5.5 と同じコールオプションで  $S_0 = 100$ ,  $T = 1.0$  の場合の価格を, 時間方向の分割方向  $M$ ,  $x$  方向の正の部分の分割数  $N$  を変えて陰的差分法, ク

ランク-ニコルソン法の両方で計算した結果を図 5.10 に示す。ここで、 $M$  は 5 から 640 まで 2 倍ずつ変化させ、 $N = 10M$  とした。また、ブラック-ショールズ公式により解析的に求めた価格は 16.734108 であり、図の縦軸はこの価格からのずれを表す。

図より、陰的差分法は直線の傾きが約  $-1$  なので 1 次精度であることがわかる。また、クランク-ニコルソン法は直線の傾きが約  $-2$  であり、予想通り 2 次精度となっていることがわかる。

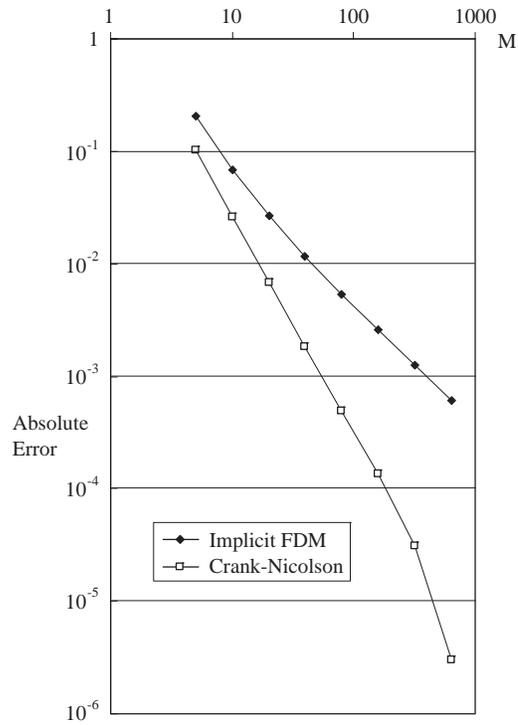


図 5.10: 陰的差分法とクランク-ニコルソン法の精度比較



## 演習問題

問題 1 陽的差分法を用いてヨーロピアン・コールオプションの価格を計算するプログラムを作成せよ。言語は何でもよい。また、このプログラムを用いて  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $K = 100$ ,  $T = 1.0$  の場合のヨーロピアン・コールオプションの価格を計算せよ。ただし,  $x_{\max} = -x_{\min} = 5.0$  とし, 空間 ( $x$ ) 方向の正の部分の分割数を 100 (負の部分も同じ), 時間 ( $\tau$ ) 方向の分割数を 40 とせよ。

問題 2 上記のプログラムにおいて, 空間方向の分割数のみを 105, 110, 115 と増やして計算を実行せよ。結果はどうなるか。また, なぜそのような結果になったのかを理論的に説明せよ。

問題 3 陰的差分法を用いてヨーロピアン・コールオプションの価格を計算するプログラムを作成せよ。また, このプログラムを用いて, 問題 1 と同じ条件でオプションの価格を計算せよ。また, 空間方向の分割数のみを 105, 110, 115 と増やして計算を実行して結果を調べ, なぜそのような結果になったのかを理論的に説明せよ。