高速積分変換に基づくオプション価格評価法

山本有作 *

*名古屋大学 大学院工学研究科 計算理工学専攻

1 はじめに

将来のある時点において，株式や外貨などの金融資産を予め決められた価格で購入（売却）する権利のことを**コール・オプション**（**プット・オプション**）と呼ぶ．たとえば，3ヵ月後に 1 ドルを 120 円で買う権利はコール・オプションの例である．オプションを利用すると市場変動による損失のリスクを回避できるため，近年日本でもオプションの需要は大きく伸びている．上記の例は権利行使時点が予め定められている最も単純なオプション（**ヨーロピアン・オプション**）であるが，権利行使時点を保有者が自由に選べるオプション（**アメリカン・オプション**）など，様々な特性を持つ複雑なオプションも広く用いられている [13][17]．また，最近では，天候デリバティブや電力デリバティブなど，金融資産以外に対するオプションも重要性を増している．

オプションを入手するには代価を支払うことが必要であり，その代価をオプションの価格と呼ぶ．無裁定条件と呼ばれる経済学的な仮定を採用すると，この価格は，オプションから得られる利益のある確率測度の下での期待値として計算できることが示される [13]．特に，資産価格が幾何的ブラウン運動に従うと仮定した場合，ヨーロピアン・オプションに対してはこの期待値が解析的に計算でき，有名な**ブラック-ショールズのオプション価格公式**が導かれる [3]．しかしアメリカン・オプションをはじめとする複雑なオプションの場合，あるいはヨーロピアン・オプションでももっと複雑・現実的な資産価格モデルを用いた場合は，オプション価格が解析的に求められない場合が多く，数値計算の利用が必須となる．

そこで本稿では，オプション価格の数値計算法の最近の発展について，筆者らの研究を中心に述べる．特に，高速性・高精度性という面から注目されている高速積分変換を用いたアルゴリズムについて，その原理と種々のオプションへの適用方法を述べることを目的とする．

以下では，まず 2 章で様々なオプションの概要を述べ，次に 3 章でオプション価格計算の原理と従来の価格計算法について簡単に説明する．4 章では，アメリカン・オプションと経路依存型と呼ばれるオプションを例にとり，高速積分変換に基づくアルゴリズムの概要を述べる．5 章では天候デリバティブなど，他のオプションへの拡張について紹介する．最後に 6 章でまとめを述べる．

2 様々なオプション

2.1 ヨーロピアン・オプションとアメリカン・オプション

前節の最初で例に挙げたオプションのように，予め定められた将来のある時点でのみ権利行使が可能なオプションをヨーロピアン・オプションと呼ぶ．この時点をオプションの**満期**と呼ぶ．以下ではオプションの売買が行われる時点を時刻 0，満期を時刻 T とする（図 1 参照）．また，予め決められた購入（売却）価格を**行使価格**と呼び，K で表す．また，権利行使によりオプションの保持者が得られる利益を**ペイオフ**と呼ぶ．時刻 t における資産価格を S_t とすると，ヨーロピアン・コール・オプションの保持者は満期 T において市場価格 S_T の資産を価格 K で買うことができるから，もし株価が図 1 の経路 A のように変化して $S_T > K$ となったならば，ペイオフは $S_T - K$ である．一方，もし経路 B のように変化して $S_T \leq K$ となったならば，権利を放棄する方が得策であり，このときペイオフは 0 となる．これらを合わせて，ペイオフは $(S_T - K)^+ \equiv \max(S_T - K, 0)$

と書ける．

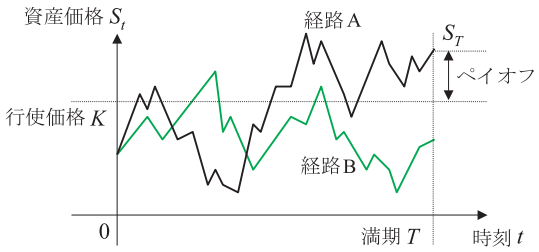

図 1: 資産価格の時間変化とペイオフ

一方，$0 \leq t \leq T$ の任意の時点で権利行使が可能なオプションを**アメリカン・オプション**と呼ぶ．時刻 τ で権利行使をする場合，アメリカン・オプションのペイオフは $(S_\tau - K)^+$ である．アメリカン・オプションは保持者により大きな自由度を与えるため，一般にヨーロピアン・オプションより高価である．また，区間 $[0, T]$ 中の予め決められた $n+1$ 個の時刻 $t_0, t_1, \ldots, t_n$ のどれかにおいてのみ権利行使可能なオプションもあり，**バミューダン・オプション**と呼ばれる．アメリカン・オプションもバミューダン・オプションも，ヨーロピアン・オプション同様，市場で広く取引されている．

2.2 経路依存型オプション

ヨーロピアン・オプションは資産の時刻 T での価格 S_T のみによりペイオフが定まる．これに対し，資産価格 S_t が区間 $[0, T]$ においてどんな経路を辿って変化してきたかによってペイオフが異なるオプションもあり，**経路依存型オプション**と呼ばれる．

代表的な経路依存型オプションとしては，S_t が $[0, T]$ で一度でもある値 H 以上（あるいは以下）になると権利が消滅する**バリア・オプション**がある．たとえば，$S_t \leq H$ となった時点で権利が消滅するオプションは**ダウン・アンド・アウト**型のバリアオプションと呼ばれる（図 2 参照）．また，満期において資産を $[0, T]$ 中の最高値で売却できる**ルックバック・オプション**も経路依存型オプションの例であり，そのペイオフは $M_T \equiv \max_{0 \leq t \leq T} S_t$ を用いて $M_T - S_T$ と書ける．また，満期において期間中の資産価格の平均値 $\bar{S} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt$ で資産を購入できる**アジアン・オプション**もあり，そのペイオフは $(S_T - \bar{S})^+$ である．

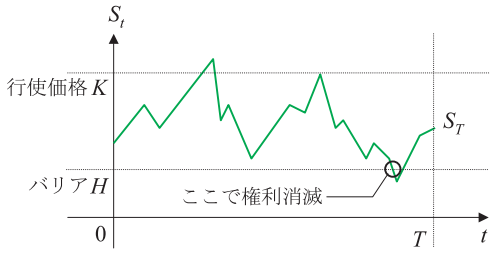

図 2: ダウン・アンド・アウト型のバリア・オプション

これらのオプションには，バリア越えのチェック，最大値の検出，平均値の計算などを離散的な時点 $t_0, t_1, \ldots, t_n$ での資産価格のみを使って行う**離散型の経路依存型オプション**という変種もあり，実際にはこちらの方がよく使われる．

なお，前項で述べたヨーロピアン／アメリカンの区別と経路依存性とは独立な概念であり，たとえばアメリカン・ルックバック・オプションという変種も存在する．

2.3 複数の資産に依存するオプション

以上では 1 種類の資産価格 S_t のみによってペイオフが決まるオプションを説明したが，ペイオフが 2 種類以上の資産価格に依存するオプションもある．たとえば，満期において資産 S^1 を S^2 と交換する権利である**スプレッド・オプション**の場合，ペイオフは $(S_T^2 - S_T^1)^+$ となる．また，たとえば日本円で米国の株式を購入できる**クウォント・オプション**もあり，為替レートを S^1（円／ドル），株式の価格を S^2（ドル），行使価格を K（円）とすると，そのペイオフは $(S_T^1 S_T^2 - K)^+$（円）となる．また，3 種類以上の資産価格に依存するオプションも利用されている．

2.4 天候デリバティブ

以上では金融資産に対するオプションを説明したが，それ以外のオプションとして，たとえば**天候デリバティブ**がある [18]．天候デリバティブとは，気象条件による売上げ・利益の変動にさらされている事業体が損害保険会社などに予め契約料金を支払い，将来一定の気象条件が満たされた場合に補償金（ペイオフ）を受け取る契約である．たとえば気温デリバティブでは，観測期間（N 日間とする）における

各日の気温 T_n（$1 \leq n \leq N$）の関数としてペイオフが定まり，平均気温 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T_i$ に対するオプション，最高気温 $\max\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ に対するオプションなどがある．

以上で説明したのは代表的なオプションであるが，オプションには他にも様々な種類が存在する．詳しくは，たとえば [20] を参照されたい．

3 オプション価格計算の原理と従来の価格計算法

3.1 オプション価格計算の原理

これらのオプションを売買するに当たっては，その妥当な価格を計算することが必要である．そのためには，まず資産価格 S_t の変動をモデル化することが必要である．もっとも簡単なモデルとして，S_t が幾何的ブラウン運動に従う場合，すなわち

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1}$$

の場合が**ブラック-ショールズモデル**と呼ばれ，広く利用されている．ここで，W_t はウィーナー過程，μ は資産の**期待収益率**（定数），σ は**ボラティリティ**と呼ばれる資産価格の変動の大きさを表す定数である．このモデルの下での（時刻 0 での）オプションの価格は，オプションのペイオフを $\{S_t\}_{t=0}^{T}$ の汎関数として $h(\{S_t\})$ と書くとき，その期待値として

$$Q_0(S_0) = e^{-rT} E_0[h(\{S_t\})] \tag{2}$$

と決めるのが合理的であることが示されている [13]．ここで，r は銀行預金などの**無危険資産の利子率**（定数）で，e^{-rT} はオプションから得られる利益が時刻 T でのものであるのに対してオプションの代価を支払うのが時刻 0 であることを補正するための**割引率**である．また，E_0 は**リスク中立確率**の下での時刻 0 における期待値演算子であり，これは資産価格が別の幾何的ブラウン運動

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{3}$$

に従うとしたときの期待値演算子として定義される．単純な（経路依存型でない）ヨーロピアン・オプションに対しては式 (2) の期待値が解析的に計算でき，ブラック-ショールズの価格公式が導かれる．

ブラック-ショールズモデルを改良したモデルとしては，資産価格が不連続に変化する効果（ジャンプ）を取り入れた**マートンのモデル** [23] や *VG*（*Variance-Gamma*）**モデル** [22]，資産価格に加えてボラティリティの確率的変化も取り入れられる *AJD*（*Affine Jump-Diffusion*）**モデル** [14] などがあり，活発に研究されている．これらのモデルに対しても，ジャンプによるリスクが分散可能などの適当な仮定を置けば，式 (2) の期待値によりオプション価格を計算できることが知られている [23]．

なお，価格計算に当たっては，1 個のオプションの価格を求めるだけでなく，行使価格 K の異なる複数のオプションの価格を同時に求めることや，行使価格，ボラティリティなどの様々な因子に対する価格の感応度（偏微分係数）を求めることも実務上重要である．

3.2 従来の価格計算法

アメリカン・オプションや経路依存型オプションの多くについては，式 (2) の期待値を陽的に与える公式は知られておらず，価格を求めるには数値計算が必要である．

前節で挙げた種々のオプションに対してよく使われる数値計算法の例としては，**モンテカルロ法**，*2* **項モデル**，**差分法**が挙げられる [17][20]．モンテカルロ法では，資産価格の確率過程に基づいて数多くのサンプルパスを発生させ，各パスに対してペイオフを求めてその平均を計算することにより，期待値を近似する．一方，2 項モデルでは，資産価格の確率過程を格子上の離散的な確率過程で近似することにより，期待値を近似する．差分法では，オプション価格の満たす偏微分方程式（式 (1) のモデルの場合はブラック-ショールズの偏微分方程式）を導き，それを差分近似により解く．

これらの数値計算法は実装が簡単であり，様々なオプションに適用できることから広く用いられているが，収束が遅いこと，2 項モデルや差分法は資産価格にジャンプがあるモデルに対して直接の適用が困難であることなどの問題点がある．

4 高速積分変換に基づくオプション価格計算法

4.1 離散型バリア・オプションへの適用

これらの従来手法に対して，最近，オプション価格をフーリエ変換あるいは畳み込み積として表現し，これに FFT や高速多重極展開法などの高速積分変換を適用して解を求める方法が提案され，高速性や高精度性という面から注目されている [6][7][8][9][10][11][24]．本節では，離散型バリア・オプションを例にとり，そのアルゴリズムの概要を説明する [7]．なお，本章では簡単のため，資産価格はブラック-ショールズモデルに従うと仮定する．

満期が T，行使価格が K，バリアレベルが H のダウン・アンド・アウト型のバリア・オプションを考える．バリア越えのチェックは，$n+1$ 個の時点 $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T$ のみで行うとする．いま，$S_i \equiv S_{t_i}$ とおき，$P_i(S)dS$ を $S_i > H$（$0 \le \forall j \le i$）でかつ $S \le S_i \le S + dS$ が成り立つ（リスク中立）確率とする．すると，$P_n(S)dS$ はオプションが時刻 T で生き残り，かつ $S \le S_T \le S + dS$ となる確率を表すから，式 (2) とダウン・アンド・アウト型オプションの定義より，時刻 0 におけるオプション価格 $Q_0^{DOC}(S_0, K, H)$ は次のように書ける．

$$Q_0^{DOC}(S_0, K, H) = e^{-rT} \int_K^\infty P_n(S_n)\,(S_n - K)\,dS_n \tag{4}$$

さらに，資産価格の推移確率密度を $p(S_i|S_{i-1})$ とすると，$\{P_i(S_i)\}_{i=1}^n$ は次の漸化式を満たすことがわかる．

$$P_1(S_1) = \begin{cases} p(S_1|S_0) & \text{if } S_1 > H, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{5}$$

$$P_i(S_i) = \begin{cases} \int_H^\infty p(S_i|S_{i-1})\,P_{i-1}(S_{i-1})\,dS_{i-1} \\ \qquad\qquad \text{if } S_i > H, \\ 0 \quad \text{otherwise}. \end{cases} \tag{6}$$

$$(i = 2, \ldots, n)$$

したがって，$P_1(S_1)$ より始めて漸化式 (6) により順次 $P_2(S_2), \ldots, P_n(S_n)$ を計算し，最終的に式 (4) によりオプションの価格を求めることができる．

ブラック-ショールズモデルをはじめ，マートンのモデル，VG モデルなど多くのモデルでは，対数資産価格

$$x_t = \ln(S_t) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t. \tag{7}$$

を導入することにより，推移確率密度を次のように書けることが知られている [6][7]．

$$p(S_i|S_{i-1})\,dS_{i-1} = p(x_i - x_{i-1})\,dx_{i-1} \tag{8}$$

このとき，漸化式 (6) は畳み込み積となる．Reiner[24] は，この畳み込み積を FFT とシンプソン公式を用いて計算する手法を提案し，経路依存型オプションの価格評価に高速積分変換を初めて導入した．一方，ブラック-ショールズモデルでは，$p(x_i - x_{i-1})$ はガウス分布となり，漸化式 (6) はガウス分布と関数との畳み込み積となる．Broadie & Yamamoto[7] は，高速多重極展開法の一種である高速ガウス変換 [15] と二重指数型数値積分公式 [25] とを組み合わせることにより，この畳み込み積を計算する *DE-FGT* **法**を提案した．各時刻における積分の標本点の数を N とするとき，Reiner の方法では 1 時間ステップあたりの計算量が $O(N \log N)$ であり，誤差は $O(N^{-d})$（d は定数）のように減少する．一方，DE-FGT 法では，計算量が $O(N)$，誤差が $O(\exp(-cN/\log N))$（c は定数）であり，漸近的に Reiner の方法より高速・高精度である．

$n = 5$，$n = 25$，$n = 50$ の 3 種類のダウン・アンド・アウト・コール・オプションの価格を，Reiner の方法，DE-FGT 法，および従来法である改良型 3 項モデル [5]（図では BGK と表示）の 3 手法で求めた場合の計算時間と精度の関係を図 3 に示す [7]．ここで，オプションのパラメータは $S_0 = K = 100$，$T = 0.2$，$r = 0.1$，$\sigma = 0.3$ であり，H を 91 から 99 まで 5 通りに変化させたときの誤差の 2 乗和の平方根をプロットしてある．図より，Reiner の方法は改良型 3 項モデルに比べて高速・高精度であり，DE-FGT 法はさらに優れていることがわかる．

4.2 バミューダン・オプションへの適用

前節で導入した DE-FGT 法は，バミューダン・オプションにも直接適用できる．いま，行使価格が K，権利行使可能時刻が $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T$，時刻 t_i で権利を行使した場合のペイオフが $h(S_i)$ のバミューダン・オプションを考える．コール・オプションならば，$h(S_i) = (S_i - K)^+$ である．このとき，t_i

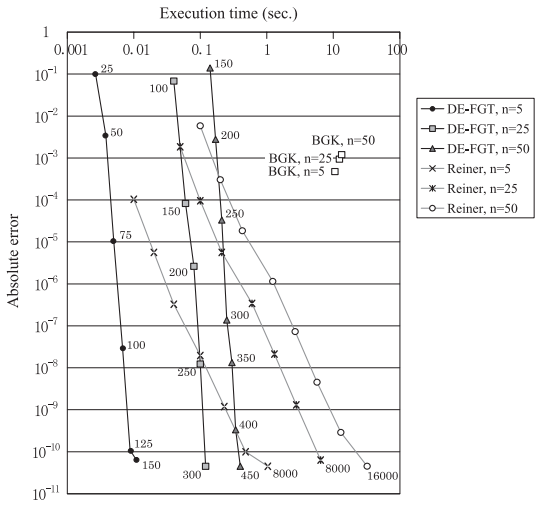

図 3: ダウン・アンド・アウト・コール・オプションに対する各手法の計算時間と精度

におけるバミューダン・オプションの価値を $Q_i(S_i)$ とすると，$Q_i(S_i)$ は次の後ろ向き漸化式を満たすことが示される [1].

$$
\begin{aligned}
Q_n(S_n) &= h_n(S_n) && (9)\\
Q_i(S_i) &= \max\{h_i(S_i), \\
&\quad e^{-r\Delta(t_{i+1}-t_i)}E_i[Q_{i+1}(S_{i+1})]\} && (10)\\
&\quad (0 \le i \le n-1)
\end{aligned}
$$

ここで，E_i はリスク中立確率の下での時刻 t_i における期待値演算子である．式 (10) の max 中の第 1 項を時刻 t_i におけるオプションの**行使価値**，第 2 項を**持続価値**と呼ぶ．式 (10) は，オプションの保持者が各時刻において，その時刻で権利行使した場合とオプションを持ち続けた場合の価値を比較し，価値の大きいほうを選択することを意味している．

オプション価格の計算では，期待値 $E_i[Q_{i+1}(S_{i+1})]$ の計算が計算量のほとんどを占める．これは，前節で導入した推移確率密度を用いて

$$
E_i[Q_{i+1}(S_{i+1})] = \int_0^\infty p(S_{i+1}|S_i)Q_{i+1}(S_{i+1})\,dS_{i+1} \tag{11}
$$

と書けるので，対数資産価格を導入することで畳み込み積となり，DE-FGT 法が適用できる．ただし，被積分関数 $Q_{i+1}(S_{i+1})$ は式 (10) のように max を用いて定義されるので，行使価値と持続価値が等しくなる点で 1 階導関数に不連続点を持つ．そこで，二重指数型数値積分公式本来の収束性を維持するため，このような不連続点を予めニュートン法によって求め，積分区間を分割して DE-FGT 法を適用する方法が取られる．詳しくは [7] を参照されたい．

4.3 離散型ルックバック・オプションへの適用

離散的な時刻 $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T$ を考え，$M_i \equiv \max_{0\le k\le i} S_k$ とおく．満期 T において資産を価格 M_n で売却できるルックバック・プット・オプションの価格は，公式 (2) より，

$$
Q_0^{LP}(S_0) = e^{-rT}E_0[M_n - S_n] \tag{12}
$$

と書ける．この価格を計算するのにも，DE-FGT 法が適用できる．

そのため，まず測度の変換

$$
dQ' = \frac{S_n}{S_t e^{r(T-t)}} \tag{13}
$$

を行う．このとき，新しい測度の下での期待値演算子 $E_0{}'$ を使うと価格を次のように書き直せることが知られている [2].

$$
Q_0^{LP}(S_0) = S_0 E_0{}'\left[\frac{M_n}{S_n} - 1\right] \tag{14}
$$

さらに，対数価格 $s_i = \log(S_i/S_0)$，$m_i = \log(M_i/S_0)$ を用いると，

$$
Q_0^{LP}(S_0) = S_0 E_0{}'\left[e^{m_n - s_n} - 1\right] \tag{15}
$$

となる．したがって，$m_n - s_n$ の確率密度関数がわかればよい．そこで，次の関係式に注意する．

$$
\begin{aligned}
m_i - s_i &= \max(0, m_{i-1} - s_i) \\
&= \max(0, (m_{i-1} - s_{i-1}) + (s_{i-1} - s_i))
\end{aligned} \tag{16}
$$

ここで，ブラック-ショールズモデルをはじめとする独立増分な確率過程では，$m_{i-1} - s_{i-1}$ と $s_{i-1} - s_i$ は独立であるから，$(m_{i-1} - s_{i-1}) + (s_{i-1} - s_i)$ の確率密度関数は $m_{i-1} - s_{i-1}$ と $s_{i-1} - s_i$ の確率密度関数の畳み込み積として与えられる．$m_i - s_i$ の確率密度関数は，畳み込みの結果において，$m_i - s_i < 0$ に対応する確率を $m_i - s_i = 0$ の点に集めることにより得られる．したがって，この確率密度関数は $m_i - s_i = 0$ において δ 関数の成分を持つ．

そこで，$m_i - s_i$ の確率密度関数を $c_i\delta(x) + g_i(x)$，$s_{i-1} - s_i$ の確率密度関数を $f(x)$ とおくと，畳み込み積の式を書き下すことにより，次の漸化式が得られる．

$$
\begin{aligned}
g_i(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{c_{i-1}\delta(y) + g_{i-1}(y)\} f(x-y)\, dy \\
&= c_{i-1} f(x) + \int_{0}^{\infty} g_{i-1}(y) f(x-y)\, dy, \qquad (17)\\
c_i &= \int_{-\infty}^{0} \bar{g}_i(x), \qquad (18)\\
g_i(x) &= \bar{g}_i(x) \quad (x > 0) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

ただし，初期値は $c_0 = 1$，$g_0(x) = 0$ である．ここで，計算の中心は式 (17) の畳み込み積であり，ブラック-ショールズモデルの場合は $f(x)$ がガウス分布となるため，DE-FGT 法を用いて高速に計算できる．

ルックバック・オプションの変種であるハインドサイト・コール・オプションの価格を DE-FGT 法と改良型 3 項モデルで求めた場合の計算時間と精度の関係を図 4 に示す [7]．この場合も，DE-FGT 法は従来法に比べて高速かつ高精度であることがわかる．

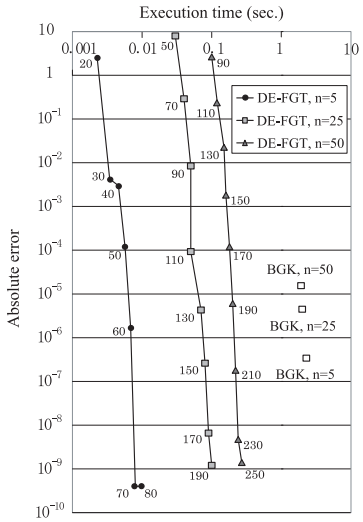

図 4: ハインドサイト・コール・オプションに対する各手法の計算時間と精度

5 その他のオプションへの拡張

5.1 複数の資産に依存するオプション

以上では，1 個の資産に依存するオプションについて述べたが，スプレッド・オプション，クウォント・オプションなど，複数の資産に依存するオプションの価格評価も重要である．高速積分変換に基づく価格評価法は，多次元の高速ガウス変換 [15][16][32] を用いることで，これらのオプションに対しても拡張できる [6][26]．特に，多次元空間における数値積分のための格子点を 1 次元の格子点の直積型に取った場合は，1 次元の高速ガウス変換を各次元に対して行えばよく，効率的な計算が可能である．この方法では，2 資産に依存するオプションに対し，モンテカルロ法，多項モデル（2 項モデルの多次元への拡張），差分法に比べて高速・高精度に価格を計算できることが確かめられている [26]．

5.2 天候デリバティブ

気温デリバティブのうち重要なものとして，ペイオフが次の式で定義される CDD（Cooling Degree Days）に依存する *CDD* **デリバティブ**がある．

$$
CDD = \sum_{n=1}^{N} \max(0, T_n - \bar{T}) \qquad (20)
$$

ここで，$\bar{T}$ は基準温度と呼ばれる定数である．CDD は基準温度より気温が高い日が多いほど，また基準温度の超え方が大きいほど大きな値を取るため，このオプションはたとえば猛暑による冷房費増大のリスクを削減するために利用できる．

CDD デリバティブの価格評価は従来モンテカルロ法が使われていたが，気温モデルとしてガウス分布に基づく Dischel モデル [12] を使う場合には，高速ガウス変換に基づく計算法を適用でき，計算時間を数分程度から数十秒へと，大幅に短縮可能である [28]．また，このアルゴリズムの効率的な並列化手法も検討されている [30][31]．

5.3 より複雑な資産価格モデルの下での価格評価

前章では，ブラック-ショールズモデルの下での価格評価について説明したが，高速積分変換と二重指

数型数値積分公式に基づく価格評価法は，より複雑かつ現実的な資産価格モデルに対しても適用可能である．たとえば，ブラック-ショールズモデルにジャンプの効果を取り入れたマートンのモデルに対しては，DE-FGT 法をほとんど計算量を増やさずに適用でき，バミューダン・オプションやルックバック・オプションの価格評価に有効であることが示されている [7][29]．また，Kou のモデルと呼ばれるジャンプ拡散型モデルに対しても，専用の高速多重極変換を設計することで，同様の方法が原理的には適用可能である [6]．他にも VG モデル，AJD モデルなど，重要なモデルは数多くあり，それらへの適用は今後の課題である．

6 おわりに

本稿では，経路依存型のオプションとバミューダン・オプションを中心に，高速積分変換に基づくオプション価格評価法を紹介した．また，複数の資産に依存するオプション，天候デリバティブ，より複雑な資産価格モデルの下での価格評価への応用について簡単に述べた．なお，オプション価格評価では，VG モデルや AJD モデルの下で複数の行使価格に対するヨーロピアン・オプションの価格を同時に求める問題も重要であり [14][22]，そこでも FFT や Fractional FFT などの高速積分変換を用いた計算法が研究されている [8][10][21]．興味のある方は，参考文献を参照されたい．また，オプション価格評価全般に関する最近の発展については，サーベイ論文 [4] が参考になる．

謝辞 本稿の執筆をお勧めくださった東京大学大学院情報理工学系研究科の杉原正顯教授と，DE-FGT 法に関する共同研究者であるコロンビア大学ビジネススクールの Mark Broadie 教授に感謝いたします．なお本研究は名古屋大学 21 世紀 COE プログラム「計算科学フロンティア」および科学研究費補助金基盤（C）一般（課題番号 18560058）の補助を受けている．

参考文献

[1] Andersen, L. and Broadie, M.: A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multi-Dimensional American Options, *Management Science*, Vol. 50, No. 9, pp. 1222-1234 (2004).

[2] Andreasen, J.: The Pricing of Discretely Sampled Asian and Lookback Options: A Change of Numeraire Approach, *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, No. 1, pp. 5–30 (1998).

[3] Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–654 (1973).

[4] Broadie, M. and Detemple, J.: Option Pricing: Valuation Models and Applications, *Management Science*, Vol. 50, No. 9, pp. 1145–1177 (2004).

[5] Broadie, M., Glasserman, P. and Kou, S. G.: A Continuity Correction for Discrete Barrier Options, *Mathematical Finance* , Vol. 7, No. 4, pp. 325–349 (1997).

[6] Broadie, M. and Yamamoto, Y.: Application of the Fast Gauss Transform to Option Pricing, *Management Science*, Vol. 49, pp. 1071–1088 (2003).

[7] Broadie, M. and Yamamoto, Y.: A Double-Exponential Fast Gauss Transform Algorithm for Pricing Discrete Path-Dependent Options, *Operations Research*, Vol. 53, No. 5, pp. 764–779 (2005).

[8] Carr, P. and Madan, D.: Option Valuation using the Fast Fourier Transform, *Journal of Computational Finance*, Vol. 3, pp. 463–520 (1999).

[9] Carr, P.: Option Pricing using Integral Transforms, http://www.math.nyu.edu/research/carrp /research.html.

[10] Chourdakis, K.: Option Pricing using the Fractional FFT, *Journal of Computational Finance*, Vol. 8, No. 2, pp. 1-18 (2004).

[11] Dempster, M. A. H. and Hong, S. S. G.: Spread Option Valuation and the Fast Fourier Transform, *Technical Report* WP 26/2000, The Judge Institute of Management Studies, University of Cambridge, 2000.

[12] Dischel, B.: The D1 Stochastic Temperature Model for Valuing Weather Futures and Options, *Applied Derivatives Trading*, 1999.

[13] Duffie, D.: *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd ed., Princeton University Press, 1996.

[14] Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K.: Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions, *Econometrica*, Vol. 68, pp. 1343–1376 (2000).

[15] Greengard, L. and Strain, J.: The Fast Gauss Transform, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 12, pp. 79–94 (1991).

[16] Greengard, L. and Sun, X.: A New Version of the Fast Gauss Transform, *Documenta Mathematica*, extra volume ICM(III), pp. 575–584 (1998).

[17] Hull, J.: *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th ed., Prentice-Hall, 2002.

[18] Jewson, S. and Brix, A.: *Weather Derivative Valuation*, Cambridge University Press, 2005.

[19] Kou, S.: A Jump Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, Vol. 48, No. 8, pp. 1086–1101 (2002).

[20] Kwok, Y. K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, 1998.

[21] Lee, R.: Option Pricing by Transform Methods: Extensions, Unification and Error Control, *Journal of Computational Finance*, Vol. 7, No. 3, pp. 51–86 (2004).

[22] Madan, D., Carr, P. and Chang, E.: The Variance-Gamma Process and Option Pricing, *European Finance Review*, Vol. 2, pp. 79–105 (1998).

[23] Merton, R.: *Continuous-Time Finance*, Basil Blackwell, 1992.

[24] Reiner, E.: Convolution Methods for Exotic Options, presentation at Columbia University, March 2000.

[25] Takahashi, H. and Mori, M.: Double Exponential Formulas for Numerical Integration, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, Vol. 9, pp. 721–741 (1974).

[26] 高柳健一郎, 山本有作, 杉原正顯: 2 資産に依存するオプションの高速・高精度価格計算手法, 情報処理学会論文誌 ACS, Vol. 46 No. SIG12 (ACS11), pp. 289–298 (2005)

[27] Tse, W. M., Li, L. K. and Ng, K. W.: Pricing Discrete Barrier and Hindsight Options with the Tridiagonal Probability Algorithm, *Management Science*, Vol. 47, No. 3, pp. 383–393 (2001).

[28] 山本有作, 恵木正史: 高速ガウス変換を用いた天候デリバティブの価格評価手法, 情報処理学会論文誌 ACS, Vol. 45, No. SIG6 (ACS6), pp. 176–185 (2004).

[29] Yamamoto, Y.: Double-Exponential Fast Gauss Transform Algorithms for Pricing Discrete Lookback Options, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, Vol. 41, pp. 989–1006 (2005).

[30] Yamamoto, Y.: An Efficient and Easily Parallelizable Algorithm for Pricing Weather Derivative, in *Large-Scale Scientific Computing* (Lirkov, I., Margenov, S. and Wasniewski, J. eds.), Lecture Notes in Computer Science 3743, Springer-Verlag, pp. 470–477 (2006).

[31] Yamamoto, Y.: Efficient Parallel Implementation of a Weather Derivatives Pricing Algorithm based on the Fast Gauss Transform, *Proceedings of IPDPS 2006*, Rhodes Island, Greece, April. 25-29, 2006.

[32] Yang, C., Duraiswami, R., Gumerov, N. and Davis, L.: Improved Fast Gauss Transform and Efficient Kernel Density Estimation, *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 464–471 (2003).

Abstract

This paper surveys recent developments in numerical methods for option pricing, focusing on the approaches based on fast integral transforms. Under the Black-Scholes framework, the pricing of discrete path dependent options and Bermudan options can be reduced to evaluation of a series of convolutions of the Gaussian distribution and a known function. These convolutions can be computed efficiently using the double-exponential integration formula and fast integral transforms. The resulting algorithms have computational complexity of $O(N)$ at each time step, where N is the number of sample points at each step, and the error decreases exponentially with N. Thus these algorithms can be shown to be faster and more accurate than any other existing algorithms. Extensions of this approach to a wider variety of options including weather derivatives and options under jump-diffusion models are also discussed.